Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro

Álgebra Linear e Geometria Analítica — Agrup. IV

2.ª Prova de Avaliação Discreta; 7 de dezembro de 2018

Duração: **1h20min**

– Justifique todas as respostas e indique os cálculos efetuados –

1. Considere a matriz $D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 3 & 3 & -6 & 5 \end{bmatrix}$,

[20pts] (a) Qual é a dimensão do espaço das colunas de D? Justifique.

[40pts] (b) Sejam $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ os planos de equações $x + y - 2z = 1$ e $3x + 3y - 6z + 5 = 0$, respetivamente. Indique, justificando, a posição relativa dos planos e calcule a distância de $\mathcal{P}_1$ a $\mathcal{P}_2$.

2. Seja $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3)$ uma base de $\mathbb{R}^3$, onde $X_1 = (1, 1, 0), X_2 = (0, 1, 1)$ e $X_3 = (1, -1, 1))$.

[25pts] (a) Mostre que $\mathcal{T} = (X_1 + 3X_2, X_2 - X_3, 2X_1)$ é uma base de $\mathbb{R}^3$.

[20pts] (b) Determine a matriz de mudança de base de $\mathcal{T}$ para $\mathcal{B}$.

[20pts] (c) Calcule o vetor das coordenadas de Y na base $\mathcal{B}$ sabendo que $[Y]_{\mathcal{T}} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}$.

3. Seja $\mathcal{W}$ o subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$ gerado por $\mathcal{K} = \left\{(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}), (0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})\right\}$

[20pts] (a) Verifique que $\mathcal{K}$ é uma base ortonormada de $\mathcal{W}$.

[20pts] (b) Determine $Z_1 \in \mathcal{W}$ e $Z_2 \in \mathbb{R}^3$ ortogonal a $\mathcal{W}$ tais que $(1, 2, 3) = Z_1 + Z_2$.

[35pts] 4. Mostre que $\mathcal{S} = \{ax^2 + bx + c \in \mathcal{P}_2 \colon a + b - 2c = 0\}$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{P}_2$.