Cálculo I – Agr. 4 (2020/2021)

2.º teste – Turma TP4-A1

Resolução:

1. a) $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

(30 pts)

$$= \int x^3 \left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}} dx = -\frac{1}{2}\int \underbrace{x^2}_{v} \underbrace{\left[-2x\left(1-x^2\right)^{-1/2}\right]}_{u'} dx$$

Utilizando primitivação por partes:

$$= -\frac{1}{\cancel{2}}\,\frac{\left(1-x^2\right)^{1/2}}{\cancel{1/2}}\cdot x^2 + \frac{1}{\cancel{2}}\int 2x\,\frac{\left(1-x^2\right)^{1/2}}{\cancel{1/2}}\,dx$$

$$= -x^2\left(1-x^2\right)^{1/2} - \frac{\left(1-x^2\right)^{3/2}}{3/2} + C$$, C constante real em intervalos.

$$= -x^2\sqrt{1-x^2} - \frac{2}{3}\sqrt{\left(1-x^2\right)^3} + C$$

$$= -x^2\sqrt{1-x^2} - \frac{2}{3}\left(1-x^2\right)\sqrt{1-x^2} + C$$

$$= \left(-x^2 - \frac{2}{3} + \frac{2}{3}x^2\right)\sqrt{1-x^3} + C$$

$$= \left(-\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}\right)\sqrt{1-x^2} + C$$

$$= -\frac{1}{3}\left(x^2+2\right)\sqrt{1-x^2} + C$$

1. b) $\displaystyle\int \frac{12x+8}{x^4-4x^2}\,dx$, fração racional própria

$$\frac{12x+8}{x^4-4x^2} = \frac{12x+8}{x^2\left(x^2-4\right)} = \frac{12x+8}{x^2(x-2)(x+2)}$$

$$\frac{12x+8}{x^4-4x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-2} + \frac{D}{x+2}$$

$$12x+8 = A\,x\left(x^2-4\right) + B\left(x^2-4\right) + C\,x^2(x+2) + D\,x^2(x-2)$$

$$12x+8 = (A+C+D)x^3 + (B+2C-2D)x^2 + (-4A)x + (-B)$$

$$\begin{cases} A+C+D=0 \\ B+2C-2D=0 \\ -4A=12 \\ -4B=8 \end{cases} \quad \begin{cases} A=-3 \\ B=-2 \\ C+D=3 \\ 2C-2D=2 \end{cases} \quad \begin{cases} - \\ - \\ C+D=3 \\ 4C=8 \end{cases} \quad \begin{cases} A=-3 \\ B=-2 \\ C=2 \\ D=1 \end{cases}$$

$$\int \frac{12x+8}{x^4-4x^2}\,dx = -3\int\frac{dx}{x} - 2\int\frac{dx}{x^2} + 2\int\frac{dx}{x-2} + \int\frac{dx}{x+2}$$

$$= -3\ln|x| + \frac{2}{x} + 2\ln|x-2| + \ln|x+2| + C,$$

C constante real em intervalos.

1. c) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x - \sin x\cdot\cos x}\,dx \quad , x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\setminus\left\{\frac{\pi}{4}\right\}$

$x = \operatorname{arctg} t \neq \frac{\pi}{4}$, $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{1+t^2} > 0 \ \forall x\in\left]0,\frac{\pi}{4}\right[\setminus\left\{\frac{\pi}{4}\right\}$ (mantém sinal)

$t = \operatorname{tg} x,\ t\neq 1,\ t>0$

$\cos^2(\operatorname{arctg} t) = \dfrac{1}{1+t^2}$ | $dx = \dfrac{1}{1+t^2}dt$

$$\sin^2(\operatorname{arctg} t) = 1-\cos^2(\operatorname{arctg} t) = 1-\frac{1}{1+t^2} = \frac{1+t^2-1}{1+t^2} = \frac{t^2}{1+t^2}$$

Como $t>0$:

$$\sin(\operatorname{arctg} t)\cos(\operatorname{arctg} t) = \sqrt{\frac{t^2}{1+t^2}\cdot\frac{1}{1+t^2}} = \frac{\sqrt{t^2}}{1+t^2} = \frac{t}{1+t^2}$$

$$\int\frac{dx}{\sin^2 x - \sin x\cdot\cos x} = \int \frac{1}{\frac{t^2}{1+t^2} - \frac{t}{1+t^2}}\,\frac{1}{1+t^2}\,dt$$

$$= \int\frac{1}{t^2-t}\,dt = \int\frac{1}{t(t-1)}\,dt$$

$$= \int \frac{-1}{t} + \frac{1}{t+1}\,dt$$

$$= -\ln|t| + \ln|t-1| + C,$$ C constante real em intervalos

$$= -\ln(\operatorname{tg} x) + \ln|\operatorname{tg} x - 1| + C$$

$$= \ln\left(\frac{|\operatorname{tg} x-1|}{\operatorname{tg} x}\right) + C = \ln|\operatorname{cotg} x - 1| + C$$

C.A.

$$\frac{1}{t(t-1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t-1}$$

$$1 = At - A + Bt$$

$$1 = (A+B)t - A$$

$$\begin{cases} A=-1 \\ B=1 \end{cases}$$

2. $\mathcal{A} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ln^2 x \leq y \leq \ln x\}$

NOTA: O enunciado foi corrigido para o que se pretendia. A correção foi criteriosa para não prejudicar nenhum aluno.

a) $\ln^2 x = \ln x \quad , x > 0$

$\ln^2 x - \ln x = 0$

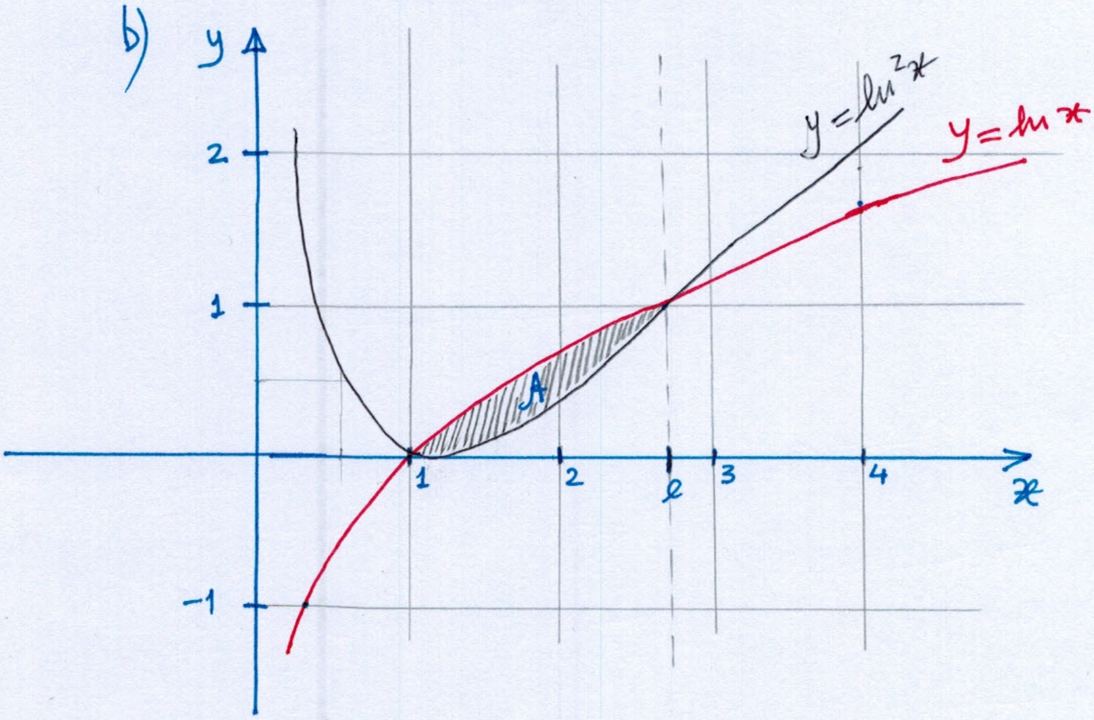
$\ln x(\ln x - 1) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \vee \ln x = 1 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = e$

Os pontos de interseção pedidos são

$\ln 1 = 0 \quad , \ln e = 1$

$P = (1,0)$ e $Q = (e,1)$

b)



$\mathcal{A}$ é a região representada a tracejado

c) $\mathcal{A} = \int_1^e (\ln x - \ln^2 x)\, dx$

A função integranda é contínua em $[1,e]$. Logo a regra de Barrow é aplicável pois a função é integrável e primitivável

$\mathcal{A} = \left[3x\left(\ln x - \frac{1}{3}\ln^2 x - 1\right)\right]_1^e$

$\mathcal{A} = \left[3e\left(\cancel{1} - \frac{1}{3} - \cancel{1}\right)\right] - \left[3(-1)\right]$

$\mathcal{A} = -e + 3 = 3 - e$

C.A.

$P\underbrace{(1)}_{u'}\underbrace{\ln^2 x}_{v}$

$Pu'v = x\ln^2 x - P\, x\frac{2\ln x}{x}$

$Pu'v = x\ln^2 x - 2\,P\ln x$ ver a seguir

$Pu'v = x\ln^2 x - 2(x\ln x - x) + C$, C constante real em intervalos

$P\underbrace{(1)}_{f'}\underbrace{\ln x}_{g}$

$Pf'g = x\ln x - P\, x\frac{1}{x}$

$Pf'g = x\ln x - x + C$, C constante real em intervalos

$P(\ln x - \ln^2 x) = x\ln x - x - \left[x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x\right] + C$
$= 3x\left(\ln x - \frac{1}{3}\ln^2 x - 1\right) + C$

3. f contínua em $\mathbb{R}$

$$g(x) := \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt \quad \text{com} \quad D_g = \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

a) Provar que $CD_g \subset CD_f$

$$g(x) = \frac{F(x)}{x} \quad , \text{ sendo } F(x) := \int_0^x f(t)\,dt$$

Como f é contínua em qualquer intervalo $[a,b]$ fechado e limitado que contém o ponto $t=0$, então podemos aplicar o Teorema do Valor Médio para Integrais para escrever

$$F(x) = \begin{cases} \overbrace{f(c)\,(x-0)}^{f(c)x}, & \text{se } x>0, \text{ para algum } c \in]0,x[\\ 0, & \text{se } x=0 \\ \underbrace{-f(d)\,(0-x)}_{f(d)x}, & \text{se } x<0, \text{ para algum } d \in]x,0[\end{cases}$$

Seja agora α um qualquer número de CD_g então existe $\beta \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ tal que $\alpha = g(\beta)$ e, portanto, usando o TVMI:

$$\alpha = g(\beta) = \frac{1}{\beta}\int_0^\beta f(t)\,dt = \frac{1}{\cancel{\beta}}\,\cancel{(\beta-0)}\,f(\xi) = f(\xi),$$

$\xi \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Nota: $\xi = c$ se $x>0$ ou $\xi = d$ se $x<0$.

Como $\alpha = f(\xi)$ tem-se $\alpha \in CD_f$, tendo-se o pretendido $CD_g \subset CD_f$.

05/05

3.b) Seja agora $f(t) = \alpha + \cos t$, com $\alpha \in \mathbb{R}$ (fixado).

- É claro que $\lim_{t \to +\infty} f(t) = \lim_{t\to+\infty} (\alpha + \cos t)$ não existe

Basta verificar que se $t = 2n\pi$, $n \in \mathbb{N}$, temos

$$L_1 = \lim_{n\to+\infty} f(2n\pi) = \alpha + \cos(2n\pi) = \alpha + 1$$

E se $t = \pi + 2n\pi$, $n \in \mathbb{N}$, temos

$$L_2 = \lim_{n\to+\infty} f(\pi + 2n\pi) = \alpha + \cos(\pi + 2n\pi) = \alpha - 1$$

Como $L_1 \neq L_2$, então $\lim_{t\to+\infty} f(t)$ não existe.

- Considere-se agora o limite

$$L = \lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}\int_0^x (\alpha + \cos t)\,dt\right]$$

Como $f(t) = \alpha + \cos t$ é primitivável e integrável (até é contínua) em qualquer intervalo $[0, b]$, $\forall b \in \mathbb{R}^+$ podemos usar a Regra de Barrow

$$L = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}\left(\alpha t + \sin t\right)_0^x\right] = \lim_{x\to+\infty}\left(\left[\frac{\alpha x}{x} + \frac{\sin x}{x}\right] - [0]\right)$$

$$L = \lim_{x\to+\infty}\left(\alpha + \frac{\sin x}{x}\right) = \alpha + \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\sin x\right)$$

Como $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$ ($\frac{1}{x}$ é um infinitésimo) e

$|\sin x| \leq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$ ($\sin x$ é uma função limitada)

resulta que $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\sin x = 0$

$L = \alpha$ (apesar da função integranda não ter limite quando $x \to +\infty$)

//