Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

Cálculo I - agr. 4 **2022/23**

exame final Duração: 2h30

- **Este teste continua no verso e termina com a palavra FIM. No verso encontras também a cotação e formulários.**
- **Todos os raciocínios devem ser convenientemente justificados e todas as respostas devem ser cuidadosamente redigidas.**

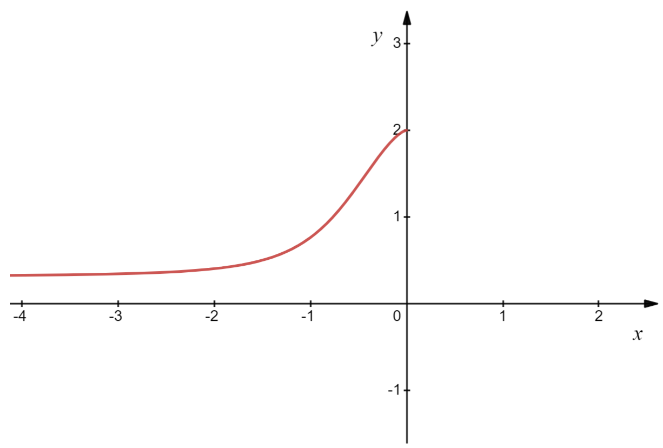
---

1. Considera a função real de variável real dada pela expressão

$$f(x) := a^{\arccos \frac{1}{x^3-1}} - \frac{\pi}{2}\,, \quad \text{onde } a \text{ é o número } 1{,}5\,,$$

apenas para os valores reais de x menores do que 1 e para os quais a expressão faça sentido.

Em baixo podes ver um esboço do seu gráfico tal como produzido por um conhecido software gráfico.



Não se garante que este esboço esteja cem por cento correto. Foi aqui colocado para o caso de achares que é útil, mas usa-o por tua conta e risco. O que se pede que faças aqui é que resolvas as questões abaixo usando as técnicas que foram dadas nas aulas (em particular não serão aceites justificações com base no esboço ao lado):

   (a) Determina o domínio D_f de definição de f dentro do intervalo $]-\infty, 1[$.

   (b) Determina, caso existam, todos os extremos (os absolutos e os relativos) e os respetivos extremantes de f no domínio acima determinado (se achares que algum deles não existe, deves explicar porquê).

2. Calcula as primitivas das seguintes funções:

   (a) $\arctan(\sinh x) \cdot \sinh x$;   (b) $\dfrac{10}{x^4 + 2x^3 + 5x^2}$;   (c) $\dfrac{e^{x/2}}{\sqrt{1 - e^x}}$.

   Sugestão: Na alínea (a) primitiva por partes e na alínea (c) faz uma mudança para uma variável t de modo a que se verifique $e^{x/2} = t$.

3. Seja $\mathcal{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{y^2}{2} - 3 \leq x \leq y + 1\}$.

   (a) Calcula os pontos de interseção dos gráficos de $x = \frac{y^2}{2} - 3$ e $x = y + 1$.
   Nota: Para efeitos da resolução da alínea seguinte informa-se que a solução é $(-1, -2)$ e $(5, 4)$, mas nenhuma cotação terás na presente alínea se apenas verificares que estes pontos satisfazem as duas equações.

   (b) Representa geometricamente a região $\mathcal{A}$ e calcula a sua área.

4. Determina a natureza e, no caso de convergência, o valor do integral impróprio $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt[3]{1 - x^2}}\, dx$.

   [Nota: Não compliques: a primitiva envolvida é quase imediata após eventual ajuste com constante multiplicativa adequada.]

5. (a) Estuda a natureza das seguintes séries numéricas. Em caso de convergência indica se é simples ou absoluta.

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}\,\cos(n\pi)}{2n^2+3n}$; (ii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!\,(n+1)!}{(3n)!}$.

(b) Determina a soma da série numérica convergente $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2-1}$.

[Sugestão: Para o caso de ser útil, observa que $(-1)^n = (-1)^{n+2}$.]

6. Seja $f : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, crescente e estritamente positiva.

(a) Por que é que o $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ existe de certeza, finito ou $+\infty$?

(b) Mostra que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\displaystyle\int_x^{2x} f(t)\,dt}{f(x)} = +\infty.$$

[Sugestão: Tira partido do Teorema da média para integrais ou da chamada propriedade da limitação do integral para encontrares um minorante para o numerador da fração tal que, com esse minorante, a nova fração tenda para $+\infty$ quando $x \to +\infty$. Mas não te esqueças de justificar os teus argumentos — a sugestão aqui dada não serve de justificação.]

FIM

Cotação:

1.(a) 1,5; 1.(b) 2,5; 2.(a) 1,5; 2.(b) 2; 2.(c) 1,5; 3. 3; 4. 2; 5.(a) 2; 5.(b) 1; 6.(a) 1; 6.(b) 2.

Algumas fórmulas de derivação

função de x	$\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dx}}$
$m\,u(x),\ m \in \mathbb{R}$	$m\,u'(x)$
$u(x)^n,\ n \in \mathbb{R}$	$n\,u(x)^{n-1}\,u'(x)$
$\log_a \lvert u(x)\rvert,\ a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$	$\frac{u'(x)}{u(x)\ln a}$
$a^{u(x)},\ a \in \mathbb{R}^+$	$a^{u(x)}u'(x)\ln a$
$\sin u(x)$	$\cos u(x)\,u'(x)$
$\cos u(x)$	$-\sin u(x)\,u'(x)$
$\tan u(x)$	$\sec^2 u(x)\,u'(x)$
$\operatorname{cotan} u(x)$	$-\csc^2 u(x)\,u'(x)$
$\sec u(x)$	$\tan u(x)\ \sec u(x)\,u'(x)$
$\csc u(x)$	$-\operatorname{cotan} u(x)\ \csc u(x)\,u'(x)$
$\sinh u(x)$	$\cosh u(x)\,u'(x)$
$\cosh u(x)$	$\sinh u(x)\,u'(x)$
$\arcsin u(x)$	$\frac{u'(x)}{\sqrt{1-u(x)^2}}$
$\arccos u(x)$	$-\frac{u'(x)}{\sqrt{1-u(x)^2}}$
$\arctan u(x)$	$\frac{u'(x)}{1+u(x)^2}$
$\operatorname{arccot} u(x)$	$-\frac{u'(x)}{1+u(x)^2}$

Algumas fórmulas trigonométricas

$\sec u = \frac{1}{\cos u}$	$\csc u = \frac{1}{\sin u}$
$\cot u = \frac{\cos u}{\sin u}$	
$\cos^2 u = \frac{1+\cos(2u)}{2}$	$\sin^2 u = \frac{1-\cos(2u)}{2}$
$1+\tan^2 u = \sec^2 u$	$1+\operatorname{cotan}^2 u = \csc^2 u$
$\cos^2(\arcsin u) = 1-u^2$	$\sin^2(\arccos u) = 1-u^2$

Algumas fórmulas hiperbólicas

$\sinh u = \frac{e^u-e^{-u}}{2}$	$\cosh u = \frac{e^u+e^{-u}}{2}$
$\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1$	