2.º Teste de Cálculo I (Ag. 4) em 23/01/2023

Questão 1:

a) $\frac{y^2}{2} - 3 = y + 1$

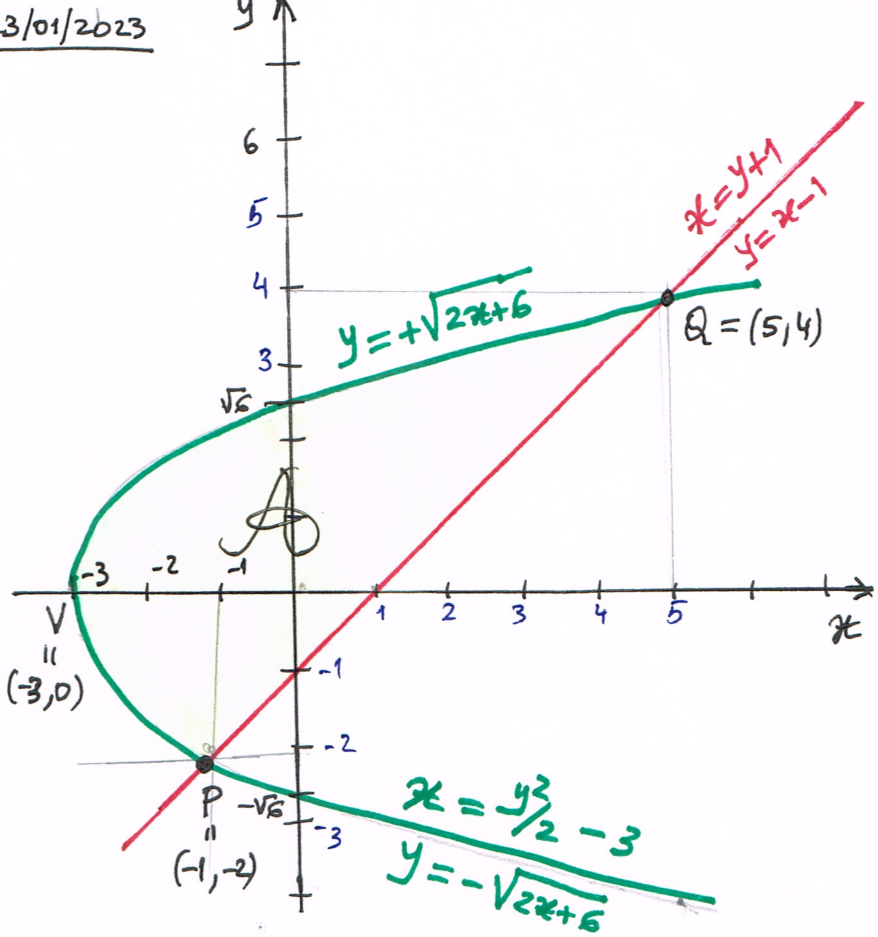
$y^2 - 2y - 8 = 0$

$y = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(-8)}}{2} = 1 \pm 3$

$y = -2 \quad \vee \quad y = 4$

$x = -2+1 = -1 \qquad x = 4+1 = 5$

$P = (-1,-2) \quad ; \quad Q = (5,4)$



A região A está colorida a amarelo.

b) Vértice da parábola:

$\frac{d}{dy}\left(\frac{y^2}{2} - 3\right) = y = 0$

$x = \frac{0^2}{2} - 3 = -3$

$V = (-3,0)$

c) 1.ª Resolução:

Para obter o valor da área integrando em ordem a y, descrevemos a região a partir da variável y: y vai de -2 a 4 e os x correspondentes vão de x tal que $x = \frac{y^2}{2} - 3$ a x tal que $x = y+1$. O seguinte integral dá o valor da área:

$$\text{Área}(A) = \int_{-2}^{4} (y+1) - \left(\frac{y^2}{2} - 3\right) dy$$

$$= \int_{-2}^{4} -\frac{y^2}{2} + y + 4 \, dy$$

$$= \left[-\frac{y^3}{6} + \frac{y^2}{2} + 4y\right]_{-2}^{4}$$

$$= \left[-\frac{y^3}{6}\right]_{-2}^{4} + \left[\frac{y^2}{2}\right]_{-2}^{4} + \left[4y\right]_{-2}^{4}$$

$$= -12 + 6 + 24$$

$$= 18$$

c) Resolução alternativa

Descrevemos a região na variável x:

- Se $x \in [-3,-1]$ então $-\sqrt{2x+6} \leq y \leq \sqrt{2x+6}$
- Se $x \in [-1,5]$ então $x - 1 \leq y \leq \sqrt{2x+6}$

$$\text{Área}(A) = \int_{-3}^{-1} \sqrt{2x+6} - \left(-\sqrt{2x+6}\right) dx + \int_{-1}^{5} \sqrt{2x+6} - (x-1) \, dx$$

$$= \left[\frac{2}{3}(2x+6)^{3/2}\right]_{-3}^{-1} + \left[\frac{1}{3}(2x+6)^{3/2} - \frac{x^2}{2} + x\right]_{-1}^{5}$$

$$= \frac{16}{3} + \frac{56}{3} - 12 + 6$$

$$= 18$$