Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

CÁLCULO II - Agrupamento 4 19 de julho de 2021

Exame da Época de Recurso Duração: 2h30m

N.º: .... **Nome:** ....

Curso: .... **N.º de folhas suplementares entregues:** ....

Declaro que desisto: ....

O exame é composto por 8 (oito) questões as quais devem ser respondidas em folhas separadas.
O formulário encontra-se no verso da última folha.
Justifique todas as respostas de forma clara e concisa.

1. [**30**] Considere a série de potências $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n\,2^{n-1}}$.

   (a) Determine o domínio de convergência da série, indicando os pontos onde a convergência é simples e os pontos onde a convergência é absoluta.

   (b) Determine a soma $S(x)$.

   (**Sugestão:** Comece por identificar a derivada $S'(x)$ e tenha em conta o valor de $S(1)$)

2. [**20**] Usando o resto na forma de Lagrange, mostre que o erro (absoluto) cometido ao aproximar $f(x) = \operatorname{sen}(2x)$ pelo polinómio de MacLaurin $T_0^3 f(x)$, no intervalo $]-0.1, 0.1[$, é inferior a $\frac{2}{3} \times 10^{-4}$.

3. [**30**] Considere a função f definida em $[-\pi, \pi]$ por $f(x) = |x|(\pi - |x|)$.

   (a) Justifique que a série de Fourier de f é uma série de cossenos, ou seja, da forma

   $$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) \qquad (a_n \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}_0)$$

   e calcule o coeficiente a_0 que figura nesta série.

   (b) Sabendo agora que a série de Fourier de f é

   $$\frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2nx)}{n^2},$$

   mostre que esta série converge uniformemente em $[-\pi, \pi]$ e indique a sua função soma.

   (c) Usando o resultado da alínea anterior, prove que

   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

4. $[\mathbf{40}]$ Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = 3x^2 + 2y^2 - 4y + 1$.

(a) Determine os pontos críticos de f e classifique-os (em minimizante local, maximizante local ou ponto de sela).

(b) Determine os extremos absolutos de f no círculo $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 16\}$.

5. $[\mathbf{25}]$ Resolva as seguintes equações diferenciais:

(a) $3x^2y^2y' = 1 + x^2$.

(b) $y' + 2xy = e^{-x^2} \cos x$.

6. $[\mathbf{20}]$ Considere as seguintes equações diferenciais:

$$y''' + y' = e^x \tag{1}$$

$$y''' + y' = 6\cos(2x). \tag{2}$$

(a) Mostre que $y_1 = \dfrac{e^x}{2}$ é solução da equação (1) e que $y_2 = -\mathrm{sen}\,(2x)$ é solução da equação (2).

(b) Determine a solução geral da equação diferencial

$$y''' + y' = e^x + 6\cos(2x).$$

7. $[\mathbf{25}]$ Usando transformadas de Laplace, determine a solução do problema de valores iniciais

$$y'' + y = 4e^t, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = -3.$$

8. $[\mathbf{10}]$ Considere a equação diferencial

$$y'' + 2by' + a^2y = 0,$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$. Mostre que se ϕ é uma solução da equação dada, então $\psi = \phi'$ é também solução da mesma equação.

FORMULÁRIO

Algumas fórmulas de derivação

$(f\,g)' = f'g + f\,g'$	$(\frac{f}{g})' = \frac{f'g - f\,g'}{g^2}$
$(k\,f)' = k\,f' \qquad (k \in \mathbb{R})$	$(f^\alpha)' = \alpha\, f^{\alpha-1} f' \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$
$(a^f)' = f'\,a^f\,\ln a \qquad (a \in \mathbb{R}^+)$	$(\log_a f)' = \frac{f'}{f\,\ln a} \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$
$(\operatorname{sen} f)' = f'\,\cos f$	$(\cos f)' = -f'\operatorname{sen} f$
$(\operatorname{tg} f)' = f'\,\sec^2 f = \frac{f'}{\cos^2 f}$	$(\operatorname{cotg} f)' = -f'\operatorname{cosec}^2 f = -\frac{f'}{\operatorname{sen}^2 f}$
$(\operatorname{arcsen} f)' = \frac{f'}{\sqrt{1-f^2}}$	$(\arccos f)' = -\frac{f'}{\sqrt{1-f^2}}$
$(\operatorname{arctg} f)' = \frac{f'}{1+f^2}$	$(\operatorname{arccotg} f)' = -\frac{f'}{1+f^2}$

Integração por partes: $\displaystyle\int f'g = f\,g - \int f\,g'$

Alguns desenvolvimentos em série de MacLaurin

- $\displaystyle\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots, \quad x \in]-1,1[$
- $\displaystyle e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, \quad x \in \mathbb{R}$
- $\displaystyle\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots, \quad x \in \mathbb{R}$
- $\displaystyle\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots, \quad x \in \mathbb{R}.$

Algumas transformadas de Laplace

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s), \quad s > s_f$$

função	transformada
$t^n \ \ (n \in \mathbb{N}_0)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}\,,\ s > 0$
$\mathrm{e}^{at} \ \ (a \in \mathbb{R})$	$\frac{1}{s-a}\,,\ s > a$
$\operatorname{sen}(at) \ \ (a \in \mathbb{R})$	$\frac{a}{s^2+a^2}\,,\ s > 0$
$\cos(at) \ \ (a \in \mathbb{R})$	$\frac{s}{s^2+a^2}\,,\ s > 0$
$\operatorname{senh}(at) \ \ (a \in \mathbb{R})$	$\frac{a}{s^2-a^2}\,,\ s > \lvert a\rvert$
$\cosh(at) \ \ (a \in \mathbb{R})$	$\frac{s}{s^2-a^2}\,,\ s > \lvert a\rvert$

função	transformada
$\mathrm{e}^{\lambda t} f(t) \ \ (\lambda \in \mathbb{R})$	$F(s-\lambda)$
$H_a(t) f(t-a) \ \ (a > 0)$	$e^{-as}F(s)$
$f(at) \ \ (a > 0)$	$\frac{1}{a}\,F\left(\frac{s}{a}\right)$
$t^n f(t) \ \ (n \in \mathbb{N})$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$
$f'(t) \ \ (n \in \mathbb{N})$	$sF(s) - f(0)$
$f''(t) \ \ (n \in \mathbb{N})$	$s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$
$f^{(n)}(t) \ \ (n \in \mathbb{N})$	$s^nF(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k} f^{(k-1)}(0)$