Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

Matemática Discreta 2020/2021 - UC 47166 (1ºAno/2ºSem)

Teste T1 - QUESTÃO1 Exemplo de Resolução - 28/04/2021

TURNO 1/QUESTÃO 1. Seja $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $\mathcal{P} = \{\{1\}, \{2, 3, 4\}, \{5, 6\}\}$ uma partição de A. Considere a relação binária definida em A do seguinte modo:

$$x\mathcal{R}y \text{ se e só se } x \in S \wedge y \in S, \text{ com } S \in \mathcal{P}.$$

1.(a) Explicite $\mathcal{R}$, indicando os seus elementos.

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= \{(x, y) \in A^2 : (x \in S) \wedge (y \in S), \text{ com } S \in \mathcal{P}\} \\ &= \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 4), (4, 2), (4, 3), (5, 6), (6, 5)\}. \end{aligned}$$

1.(b) Mostre que $\mathcal{R}$ é uma relação de equivalência em A.

(i) *$\mathcal{R}$ é reflexiva se para todo o $x \in A$, $(x, x) \in \mathcal{R}$.*

Se $x \in A$, como $\mathcal{P}$ é uma partição de A, existe um único $S \in \mathcal{P}$ tal que $x \in S$. Tem-se então que

$$\begin{aligned} x \in S &\Leftrightarrow (x \in S) \wedge (x \in S), \quad \text{pela idempotência da conjunção,} \\ &\Leftrightarrow (x, x) \in \mathcal{R}, \quad \text{pela definição da relação binária } \mathcal{R}. \end{aligned}$$

Logo, $\mathcal{R}$ é reflexiva.

(ii) *$\mathcal{R}$ é simétrica se para quaisquer $x, y \in A$, $(x, y) \in \mathcal{R} \Rightarrow (y, x) \in \mathcal{R}$.*

Se $x, y \in A$ são tais que $(x, y) \in \mathcal{R}$, então existe um único $S \in \mathcal{P}$ tal que $(x \in S) \wedge (y \in S)$. Pela comutatividade da conjunção tem-se que $(x \in S) \wedge (y \in S) \Leftrightarrow (y \in S) \wedge (x \in S)$ que, pela definição da relação binária $\mathcal{R}$, é equivalente a $(y, x) \in \mathcal{R}$. Conclui-se, assim, que $\mathcal{R}$ é simétrica.

(iii) *$\mathcal{R}$ é transitiva se para quaisquer $x, y, z \in A$,*

$$((x, y) \in \mathcal{R}) \wedge ((y, z) \in \mathcal{R}) \Rightarrow (x, z) \in \mathcal{R}.$$

Se $x, y, z \in A$ são tais que $(x, y) \in \mathcal{R}$ e $(y, z) \in \mathcal{R}$, então existe um único $S \in \mathcal{P}$ tal que $x, y \in S$ e, como y e z também pertencem a um mesmo bloco da partição $\mathcal{P}$, então $x, y, z \in S$, com $S \in \mathcal{P}$. Logo, $(x, z) \in S$, com $S \in \mathcal{P}$, concluindo-se que $(x, z) \in \mathcal{R}$. Consequentemente, $\mathcal{R}$ é transitiva.

De (i), (ii) e (iii) conclui-se que $\mathcal{R}$ é uma relação de equivalência.

1.(c) Seja $B = A \cup \{7, 8, 9, 10\}$. Determine uma partição de B tal que $|B/\mathcal{T}| = 6$, onde $\mathcal{T}$ é a relação de equivalência em B induzida por essa partição.

Seja $B = \{1, 2, 3, \cdots, 10\}$ e $\mathcal{Q}$ uma partição de B tal que a relação de equivalência $\mathcal{T}$ induzida por $\mathcal{Q}$ verifica a condição $|B/\mathcal{T}| = 6$. Então $\mathcal{Q} = B/\mathcal{T}$ tem 6 elementos que são as classes de equivalência de $\mathcal{T}$. Portanto, $\mathcal{Q}$ é uma partição de B com 6 blocos. Por exemplo, $\mathcal{Q} = \Big\{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}, \{7\}, \{8\}, \{9, 10\}\Big\}$.

TURNO 2/QUESTÃO 1. Seja $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ e $\mathcal{P} = \{\{a, b\}, \{c, d, e\}, \{f\}\}$ uma partição de A. Considere a relação binária definida em A do seguinte modo:

$$x\mathcal{R}y \text{ se e só se } x \in S \wedge y \in S, \text{ com } S \in \mathcal{P}.$$

1.(a) Explicite $\mathcal{R}$, indicando os seus elementos.

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= \{(x, y) \in A^2 : (x \in S) \wedge (y \in S), \text{ com } S \in \mathcal{P}\} \\ &= \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (c, c), (c, d), (c, e), (d, d), (d, c), (d, e), (e, e), (e, c), (e, d), (f, f)\}. \end{aligned}$$

1.(b) Mostre que $\mathcal{R}$ é uma relação de equivalência em A.

(i) *$\mathcal{R}$ é reflexiva se para todo o $x \in A$, $(x, x) \in \mathcal{R}$.*
Se $x \in A$, como $\mathcal{P}$ é uma partição de A, existe um único $S \in \mathcal{P}$ tal que $x \in S$. Tem-se então que

$$\begin{aligned} x \in S \quad &\Leftrightarrow \quad (x \in S) \wedge (x \in S), \quad \text{pela idempotência da conjunção,} \\ &\Leftrightarrow \quad (x, x) \in \mathcal{R}, \quad \text{pela definição da relação binária } \mathcal{R}. \end{aligned}$$

Logo, $\mathcal{R}$ é reflexiva.

(ii) *$\mathcal{R}$ é simétrica se para quaisquer $x, y \in A$, $(x, y) \in \mathcal{R} \Rightarrow (y, x) \in \mathcal{R}$.*
Se $x, y \in A$ são tais que $(x, y) \in \mathcal{R}$, então existe um único $S \in \mathcal{P}$ tal que $(x \in S) \wedge (y \in S)$. Pela comutatividade da conjunção tem-se que $(x \in S) \wedge (y \in S) \Leftrightarrow (y \in S) \wedge (x \in S)$ que, pela definição da relação binária $\mathcal{R}$, é equivalente a $(y, x) \in \mathcal{R}$. Conclui-se, assim, que $\mathcal{R}$ é simétrica.

(iii) *$\mathcal{R}$ é transitiva se para quaisquer $x, y, z \in A$,*

$$((x, y) \in \mathcal{R}) \wedge ((y, z) \in \mathcal{R}) \Rightarrow (x, z) \in \mathcal{R}.$$

Se $x, y, z \in A$ são tais que $(x, y) \in \mathcal{R}$ e $(y, z) \in \mathcal{R}$, então existe um único $S \in \mathcal{P}$ tal que $x, y \in S$ e, como y e z também pertencem a um mesmo bloco da partição $\mathcal{P}$, então $x, y, z \in S$, com $S \in \mathcal{P}$. Logo, $(x, z) \in S$, com $S \in \mathcal{P}$, concluindo-se que $(x, z) \in \mathcal{R}$. Consequentemente, $\mathcal{R}$ é transitiva.

De (i), (ii) e (iii) conclui-se que $\mathcal{R}$ é uma relação de equivalência.

1.(c) Seja $B = A \cup \{g, h, i, j\}$. Determine uma partição de B tal que $|B/\mathcal{T}| = 5$, onde $\mathcal{T}$ é a relação de equivalência em B induzida por essa partição.

Seja $B = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$ e $\mathcal{Q}$ uma partição de B tal que a relação de equivalência $\mathcal{T}$ induzida por $\mathcal{Q}$ verifica a condição $|B/\mathcal{T}| = 5$. Então $\mathcal{Q} = B/\mathcal{T}$ tem 5 elementos que são as classes de equivalência de $\mathcal{T}$. Portanto, $\mathcal{Q}$ é uma partição de B com 5 blocos. Por exemplo, $\mathcal{Q} = \Big\{\{a, b\}, \{c, d, e\}, \{f\}, \{g, h\}, \{i, j\}\Big\}$.