Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

Matemática Discreta 2020/2021 - UC 47166 (1ºAno/2ºSem)

Teste T1 - QUESTÃO2 Exemplo de Resolução - 28/04/2021

TURNO 1/QUESTÃO 2. Admita que o universo do discurso é um conjunto de peças de um jogo de xadrez. Sejam x, y, z, símbolos de variáveis, a, b, c, símbolos de constantes e considere definidos os seguintes predicados:

- $\text{Peao}(x) \equiv$ "x é um peão";
- $\text{Rainha}(x) \equiv$ "x é uma rainha";
- $\text{MesmaLin}(x, y) \equiv$ "x está na mesma linha que y";

1. Usando os predicados definidos traduza na lógica de primeira ordem (LPO) as afirmações:

   A1. Não é verdade que o peão a esteja na mesma linha que o peão b.

   A2. a está na mesma linha que b, exceto se forem ambas rainhas.

2. Sejam conhecidos os seguintes factos na LPO:

   F1. $\text{MesmaLin}(a, b) \;\Rightarrow\; \forall x \;(\; \text{Peao}(x) \;\Rightarrow\; \exists y \,\neg\, \text{Rainha}(y) \;)$;

   F2. $\text{MesmaLin}(a, b) \;\wedge\; \text{Peao}(c)$.

   Aplicando o princípio da resolução mostre que a partir de F1 e F2 se pode concluir $\exists z \,\neg\, \text{Rainha}(z)$.

Resolução:

Sobre 1. Por exemplo, as seguintes fórmulas:

A1: $\text{Peao}(a) \wedge \text{Peao}(b) \wedge \neg\, \text{MesmaLin}(a, b)$.

A2: $\text{MesmaLin}(a, b) \vee (\text{Rainha}(a) \wedge \text{Rainha}(b))$ ou $\text{MesmaLin}(a, b) \,\dot\vee\, (\text{Rainha}(a) \wedge \text{Rainha}(b))$.

Sobre 2. Para deduzir $\exists z \,\neg\, \text{Rainha}(z)$ a partir de F1 e F2, justificamos que o conjunto

$$\{F1, F2, \neg(\exists z \,\neg\, \text{Rainha}(z))\}$$

de fórmulas é inconsistente. Aqui

$$\neg(\exists z \,\neg\, \text{Rainha}(z)) \equiv \forall z \;\; \text{Rainha}(z).$$

Além disso, tem-se de transformar a fórmula F1 na forma normal de Skolem: em primeiro lugar, a fórmula F1 é equivalente à

$$\forall x \; \exists y \; (\neg\, \text{MesmaLin}(a, b) \vee \neg\, \text{Peao}(x) \vee \neg\, \text{Rainha}(y)),$$

depois, introduzindo um símbolo de função f de um argumento, obtém-se a fórmula

$$\forall x \; (\neg\, \text{MesmaLin}(a, b) \vee \neg\, \text{Peao}(x) \vee \neg\, \text{Rainha}(f(x))).$$

Portanto, obtém-se as cláusulas

$$\underbrace{\neg\, \text{MesmaLin}(a, b) \vee \neg\, \text{Peao}(x) \vee \neg\, \text{Rainha}(f(x))}_{C1}, \quad \underbrace{\text{MesmaLin}(a, b)}_{C2}, \quad \underbrace{\text{Peao}(c)}_{C3}, \quad \underbrace{\text{Rainha}(z)}_{C4}.$$

A resolvente binária das cláusulas $C1$ e $C2$ é a cláusula $C5$:

$$\frac{\neg\,\mathrm{MesmaLin}(a,b) \vee \neg\,\mathrm{Peao}(x) \vee \neg\,\mathrm{Rainha}(f(x)) \quad \mathrm{MesmaLin}(a,b)}{\underbrace{\neg\,\mathrm{Peao}(x) \vee \neg\,\mathrm{Rainha}(f(x))}_{C5}}$$

O unificador mais geral de $\{\mathrm{Peao}(x), \mathrm{Peao}(c)\}$ é a substituição $\sigma_1 = \{c/x\}$, e a resolvente binária das cláusulas $C5\sigma_1$ e $C3\sigma_1$ é a cláusula $C6$:

$$\frac{\neg\,\mathrm{Peao}(c) \vee \neg\,\mathrm{Rainha}(f(c)) \quad \mathrm{Peao}(c)}{\underbrace{\neg\,\mathrm{Rainha}(f(c))}_{C6}}$$

Finalmente, o unificador mais geral de $\{\mathrm{Rainha}(f(c)), \mathrm{Rainha}(z)\}$ e $\sigma_2 = \{f(c)/z\}$, e a resolvente binária de $C4\sigma_2$ e $C6\sigma_2$ é a cláusula vazia $\lozenge$ (= falso):

$$\frac{\neg\,\mathrm{Rainha}(f(c)) \quad \mathrm{Rainha}(f(c))}{\lozenge}$$

TURNO 2/QUESTÃO 2. Admita que o universo do discurso é um conjunto de peças de um jogo de xadrez. Sejam x, y, z, símbolos de variáveis, a, b, símbolos de constantes e considere definidos os seguintes predicados:

- $Cavalo(x) \equiv$ "x é um cavalo";
- $Rei(x) \equiv$ "x é um rei";
- $MesmaLin(x, y) \equiv$ "x está na mesma linha que y";

(a) Usando os predicados definidos traduza na lógica de primeira ordem (LPO) as afirmações:

A1. É falso que o cavalo a esteja na mesma linha que o cavalo b.

A2. a não está na mesma linha que b, exceto se forem ambos reis.

(b) Sejam conhecidos os seguintes factos na LPO:

F1. $\forall x\ \exists y\ (\ (\ Cavalo(x) \wedge\ Rei(y)\ )\ \Rightarrow\ \neg MesmaLin(a, b)\ )$;

F2. $Cavalo(a)\ \wedge\ MesmaLin(a, b)$.

Aplicando o princípio da resolução mostre que a partir de F1 e F2 se pode concluir $\exists z\ \neg Rei(z)$.

Resolução:

(a) A1. $Cavalo(a) \wedge Cavalo(b) \wedge \neg MesmaLinha(a, b)$ ou outra fórmula equivalente, por exemplo, $\neg[(Cavalo(a) \wedge Cavalo(b) \implies MesmaLinha(a, b)]$.

A2. $\neg MesmaLinha(a, b) \dot{\vee} (Rei(a) \wedge Rei(b))$ ou $\neg MesmaLinha(a, b) \vee (Rei(a) \wedge Rei(b))$.

(b) $F1 \equiv \forall x \exists y (\neg(Cavalo(x) \wedge Rei(y)) \vee \neg MesmaLinha(a, b))$.

Reduzindo à Forma Normal de Skolen, com f símbolo de função com um argumento, obtemos

$$\begin{aligned} &\forall x (\neg(Cavalo(x) \wedge Rei(f(x))) \vee \neg MesmaLinha(a, b)) \\ \equiv\ &\forall x (\neg Cavalo(x) \vee \neg Rei(f(x)) \vee \neg MesmaLinha(a, b))\,. \end{aligned}$$

Daqui resulta a cláusula $C1 : \neg Cavalo(x) \vee \neg Rei(f(x)) \vee \neg MesmaLinha(a, b)$

De $F2$ obtêm-se as cláusulas $C2 : Cavalo(a)$ e $C3 : MesmaLinha(a, b)$.

Queremos provar que $F1 \wedge F2 \implies F3$ é uma tautologia onde $F3 \equiv \exists z \neg Rei(z)$ ou seja que $F1 \wedge F2 \wedge \neg F3$ é inconsistente. Temos que $\neg F3 \equiv \forall z Reiz(z)$ e daqui resulta a cláusula $C4 : Rei(z)$.

Vamos usar o **princípio de resolução** para mostrar que $\{C1, C2, C3, C4\}$ é inconsistente.

A resolvente das cláusulas $C1$ e $C3$ é a cláusula $C5$:

$$\begin{array}{ll} C1: & \neg Cavalo(x) \vee \neg Rei(f(x)) \vee \neg MesmaLinha(a, b) \\ C3: & MesmaLinha(a, b) \\ \hline C5: & \neg Cavalo(x) \vee \neg Rei(f(x)) \end{array}$$

O u.m.g. de $\{Cavalo(x), Cavalo(a)\}$ é $\sigma_1 = \{a/x\}$, assim, a resolvente binária das cláusulas $C2$ e $C5$ é a cláusula $C6$:

$$\begin{array}{ll} C5\sigma_1: & \neg Cavalo(a) \vee \neg Rei(f(a)) \\ C2\sigma_1: & Cavalo(a) \\ \hline C6: & \neg Rei(f(a)) \end{array}$$

O u.m.g. de $\{Rei(z), Rei(f(a))\}$ é $\sigma_2 = \{f(a)/z\}$, assim, a resolvente binária das cláusulas $C4$ e $C6$ é a cláusula vazia:

$$\begin{array}{ll} C6\sigma_2: & \neg Rei(f(a)) \\ C4\sigma_2: & Rei(f(a)) \\ \hline & \diamond \text{ (cláusula vazia)} \end{array}$$