

Resolução da questão 4:

(a) $\int 1 dt = t + c_1, c_1 \in \mathbb{R}$.
(20 pontos)

$$\int \frac{1}{g - kv^2} dv:$$

CA: $\frac{1}{g - kv^2} = \frac{1}{(\sqrt{g} - \sqrt{k}v)(\sqrt{g} + \sqrt{k}v)} = \frac{A}{\sqrt{g} - \sqrt{k}v} + \frac{B}{\sqrt{g} + \sqrt{k}v}$

g, k constantes positivas

$$\Rightarrow 1 = A(\sqrt{g} + \sqrt{k}v) + B(\sqrt{g} - \sqrt{k}v)$$

$$v = \sqrt{\frac{g}{k}}: 1 = A \cdot 2\sqrt{g} \Leftrightarrow A = \frac{1}{2\sqrt{g}}$$

$$v = -\sqrt{\frac{g}{k}}: 1 = B \cdot 2\sqrt{g} \Leftrightarrow B = \frac{1}{2\sqrt{g}}$$

$$\int \frac{1}{g - kv^2} dv = \int \frac{\frac{1}{2\sqrt{g}}}{\sqrt{g} - \sqrt{k}v} dv + \int \frac{\frac{1}{2\sqrt{g}}}{\sqrt{g} + \sqrt{k}v} dv$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{gk}} \int \frac{-\sqrt{k}}{\sqrt{g} - \sqrt{k}v} dv + \frac{1}{2\sqrt{gk}} \int \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{g} + \sqrt{k}v} dv$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{gk}} \ln|\sqrt{g} - \sqrt{k}v| + \frac{1}{2\sqrt{gk}} \ln|\sqrt{g} + \sqrt{k}v| + c_2, c_2 \in \mathbb{R}$$

(em intervalos)

A partir da igualdade dada no enunciado, temos então que para cada $c_1 \in \mathbb{R}$ existe $c_2 \in \mathbb{R}$ (e vice-versa) tal que

$$\frac{1}{2\sqrt{gk}} \ln \left| \frac{\sqrt{g} + \sqrt{k}v}{\sqrt{g} - \sqrt{k}v} \right| + c_2 = t + c_1, \quad \forall t \geq 0.$$

Como nos dizem que para $t=0$ $v=0$, então

$$\frac{1}{2\sqrt{gh}} \ln 1 + C_2 = 0 + C_1, \text{ logo } C_2 = C_1 \text{ e portanto}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{gh}} \ln \left| \frac{\sqrt{g} + \sqrt{h} v}{\sqrt{g} - \sqrt{h} v} \right| = t, \quad t \geq 0,$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{\sqrt{g} + \sqrt{h} v}{\sqrt{g} - \sqrt{h} v} \right| = e^{2\sqrt{gh}t}, \quad t \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{g} + \sqrt{h} v}{\sqrt{g} - \sqrt{h} v} = \pm e^{2\sqrt{gh}t}, \quad t \geq 0.$$

Como para $t=0$ o sinal + de membro direito tem que ser escolhido e v , sendo a velocidade em curso, tem que variar continuamente, então o sinal + de membro direito tem que se manter durante toda a queda de paracaidista.

$$(b) \quad \frac{\sqrt{g} + \sqrt{h} v}{\sqrt{g} - \sqrt{h} v} = e^{2\sqrt{gh}t} \Leftrightarrow \sqrt{g} + \sqrt{h} v = \sqrt{g} e^{2\sqrt{gh}t} - \sqrt{h} e^{2\sqrt{gh}t} v$$

(10 pontos)

$$\Leftrightarrow \sqrt{h} (1 + e^{2\sqrt{gh}t}) v = \sqrt{g} (e^{2\sqrt{gh}t} - 1)$$

$$\Leftrightarrow v = \sqrt{\frac{g}{h}} \frac{e^{2\sqrt{gh}t} - 1}{1 + e^{2\sqrt{gh}t}}$$

$$\text{Assim, } \lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{g}{h}} \frac{e^{2\sqrt{gh}t} - 1}{1 + e^{2\sqrt{gh}t}} \quad \left(\text{Indet. } \frac{\infty}{\infty} \right)$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{g}{h}} \cdot \frac{1 - e^{-2\sqrt{gh}t}}{e^{-2\sqrt{gh}t} + 1} = \sqrt{\frac{g}{h}}$$

Obs.: também poderia ser usado o crit. de Cauchy ou diretamente o indeterminado.