

# MPEI 2024/25 - PL 1

## Probabilidade: conceitos base

**Palavras chave:** probabilidade, estimação de probabilidade, experiência aleatória, espaço de amostragem, eventos, casos favoráveis, simulação, Matlab.

Responda às seguintes questões utilizando sempre o Matlab:

### 1.1 Matlab

Esta secção baseada no documento **Matlab num instante** do Professor José Vieira, disponível em <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/11769-matlab-num-instante>. Recomenda-se fortemente a leitura do documento completo.

#### 1.1.1 Muito breve introdução ao Matlab

##### Criação de Matrizes

Para criar, por exemplo, a seguinte matriz com duas linhas e três colunas

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

basta introduzir o comando:

```
>> A= [1 2 3;4 5 6]
```

ou, em alternativa,

```
>> A= [1,2,3;4,5,6]
```

Os vectores coluna e linha são casos particulares de matrizes e são criados utilizando uma notação similar, por exemplo o vetor linha  $v = [1\ 2\ 3]$  poderá ser obtido com

```
>> v= [ 1 2 3]
```

e o correspondente vetor coluna com

```
>> v= [ 1; 2; 3]
```

ou transpondo o vetor linha

```
>> v= [1 2 3]'
```

##### Índices

O elemento da linha  $i$  e da coluna  $j$  de uma matriz  $A$  é designado por  $A(i, j)$ . Por exemplo o elemento da linha 1 e coluna 3 da matriz  $A$  é designado por  $A(1, 3)$ . Em notação Matlab, para obter o elemento  $A(1, 3)$  da matriz  $A$  definida anteriormente, pode-se escrever

```
>> A(1,3)
```

e obtém-se

```
ans= 3
```

Para alterar o valor do elemento  $A(1, 3)$  para 7 basta fazer

```
>> A(1,3) = 7
```

Os índices das matrizes são listas de números inteiros positivos que podem ser armazenadas em vectores declarados previamente. Se pretendermos por exemplo, extrair a segunda linha da matriz  $A$  podemos fazer

```
>> v = A(2, [1 2 3])
```

ou declarando primeiro um vector para os índices das colunas

```
>> k = [1 2 3]
```

```
>> v = A(2, k)
```

## O operador “:”

O Matlab permite gerar sequências de números de forma rápida se fizermos uso do operador “:”. Se quisermos gerar o vector  $a = [1, 2, 3, \dots, 10]$  podemos fazer

```
>> a = 1:10
```

A notação geral para o operador “:” é a seguinte

```
Número_inicial : incremento : Número_final
```

e permite a geração de sequências de números inteiros como no exemplo anterior ou mesmo de números reais.

Eis alguns exemplos:

```
>> e = 0:pi/20:2*pi
```

```
>> f = 10:-1:-10
```

O operador “:” pode ser utilizado na geração de vectores de índices obtendo-se uma notação muito compacta. Por exemplo, se quisermos obter as colunas ímpares da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \\ 6 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

podemos fazer

```
>> B = A(1:3, 1:2:3)
```

No caso anterior são indexadas todas as linhas da matriz. Para simplificar a notação, quando se pretende todas as linhas e não se conhece exactamente o número de linhas de uma matriz, pode-se utilizar a notação

```
>> B = A(:, 1:2:3)
```

Se quiséssemos obter a primeira linha da matriz  $A$  podíamos fazer

```
>> A(1, :)
```

### 1.1.2 Exercícios de consolidação

- Crie um vetor linha com uma sequência de números pares com início em 4 e a terminar no número 100.
- Crie um vetor linha com uma sequência decrescente de números inteiros com início em 5 e a terminar em -5.
- Crie um vetor linha com uma sequência de números reais igualmente espaçados com 100 elementos pertencentes ao intervalo  $[0 \dots 1]$ .
- Crie uma matriz aleatória usando o comando `>> B = rand(20, 30)` (20 linhas e 30 colunas). Construa um comando que permita extrair para uma matriz  $C$  uma sub-matriz de  $B$  constituída pelas linhas de 10 a 15 e as colunas de 9 a 12.
- Gere uma sequência,  $x$ , a começar em  $-\pi$  e a acabar em  $\pi$  com um passo de  $\pi/15$ .
- Corra o comando `>> plot(x, sin(4*pi*x))`. A que corresponde o gráfico obtido?

## 1.2 Probabilidades

1. Considere a experiência aleatória de lançar **3 vezes** uma moeda equilibrada. Pretende-se estimar por simulação a probabilidade de se obter **2 caras** no fim dos **3 lançamentos**.

Para estimar a probabilidade por simulação, é necessário executar várias vezes a experiência aleatória de lançar 3 vezes uma moeda equilibrada e calcular a frequência relativa do resultado igual a 2 caras.

Em Matlab, uma forma possível de implementar este simulador é a seguinte (assumindo que a experiência é executada 10000 vezes):

```
%% Código 1

% Gerar uma matriz com 3 linhas e 10000 colunas de números aleatórios
% entre 0.0 e 1.0 (ou seja, cada coluna representa uma experiência):
experiencias = rand(3,10000);
% Gerar uma matriz com 3 linhas e 10000 colunas com o valor 1 se o valor
% da matriz anterior for superior a 0.5 (ou seja, se saiu cara) ou com o
% valor 0 caso contrário (ou seja, saiu coroa):
lançamentos = experiencias > 0.5; % 0.5 corresponde a 1 - prob. de caras
% Gerar um vetor linha com 10000 elementos com a soma dos valores de cada
% coluna da matriz anterior (ou seja, o número de caras de cada experiência):
resultados= sum(lançamentos);
% Gerar um vetor linha com 10000 elementos com o valor 1 quando o valor do
% vetor anterior é 2 (ou seja, se a experiência deu 2 caras) ou 0 quando é
% diferente de 2:
sucessos= resultados==2;
% Determinar o resultado final dividindo o número de experiências com 2
% caras pelo número total de experiências:
probSimulacao= sum(sucessos)/10000
```

Note-se que o código proposto está desenvolvido passo a passo para mais fácil compreensão. Muitas das operações podem ser combinadas por forma a evitar o uso de matrizes intermédias e tornar a execução do código mais eficiente. Além disso, é útil usar variáveis iniciais para os parâmetros do problema para ser mais fácil alterar o código e adaptá-lo a outros casos de interesse. Assim, uma outra forma de implementar o mesmo simulador é, por exemplo, a seguinte:

```
%% Código 1 - segunda versão

N= 1e5; %número de experiências
p = 0.5; %probabilidade de cara
k = 2; %número de caras
n = 3; %número de lançamentos
lançamentos = rand(n,N) > p;
sucessos= sum(lançamentos)==k;
probSimulacao= sum(sucessos)/N
```

- (a) Analise e teste no Matlab as 2 versões de código fornecidas.
  - (b) Estime, usando as 2 versões do código, a probabilidade de obter 2 caras em 3 lançamentos de uma moeda equilibrada (execute várias vezes a simulação).
2. Estime a probabilidade de obter 6 caras em 15 lançamentos de uma moeda equilibrada? <sup>1</sup>
  3. Qual é a probabilidade de obter pelo menos 6 caras em 15 lançamentos de uma moeda equilibrada?
  4. Para facilitar o cálculo de outras situações similares às que tratou nos pontos anteriores, **crie uma função em Matlab** que permita estimar a probabilidade por simulação. A função deve ter os seguintes parâmetros de entrada:  $p$ , número de lançamentos, número de caras pretendidas e número de experiências a realizar. Deve utilizar nomes adequados para a função e para os parâmetros de entrada.

<sup>1</sup>Adapte o Código 1 e/ou a segunda versão do código 1 de forma apropriada para resolver as questões de 3 a 5

- (a) Aplique a função para voltar a estimar as probabilidades das questões anteriores assim como estimar as probabilidades para todo o espaço de amostragem<sup>2</sup> para os seguintes números de lançamentos: 20, 40 e 100.
- (b) Faça 3 gráficos, usando a função `stem`, das probabilidades estimadas para 20, 40 e 100 lançamentos.
5. Pretende-se agora calcular de forma analítica as probabilidades estimadas nos exercícios anteriores. Considere para isso a seguinte expressão

$$P(k) = C_k^n p^k (1-p)^{n-k}$$

em que  $p$  é a probabilidade de ocorrer o acontecimento em que estamos interessados (por exemplo: se o acontecimento for "sair cara" em cada lançamento,  $p = 0.5$ ),  $k$  é o número de acontecimentos que ocorreram em  $n$  repetições da experiência aleatória.

Em Matlab, esta expressão é determinada da seguinte forma:

```
% Codigo 2- cálculo analítico de probabilidade em séries experiências de Bernoulli
% Dados relativos ao problema 1
p = 0.5;
k = 2;
n = 3;
prob= nchoosek(n,k)*p^k*(1-p)^(n-k); % nchoosek(n,k) = n!/(n-k)!/k!
```

Calcule o valor analítico para cada um dos problemas anteriores e compare os resultados obtidos com os valores estimados.

6. Considere um processo de produção fabril que produz torneiras em que a probabilidade de cada torneira ser produzida com defeito é de 30%. No processo de controlo de qualidade, é selecionada uma amostra de 5 peças.
- (a) Calcule analiticamente e por simulação a probabilidade de 3 peças da amostra serem defeituosas.
- (b) Calcule analiticamente e por simulação a probabilidade de, no máximo, 2 das peças da amostra serem defeituosas.
- (c) Baseado em simulação, construa no Matlab o histograma representativo da distribuição de probabilidades do número de peças defeituosas da amostra.

### 1.2.1 [TPC] Exercícios de revisão

Para revisão, responda, sozinho, às seguintes questões. Sempre que apropriado deve utilizar simulação ou análise combinatória para chegar à(s) resposta(s):

- R1 Quantas sequências diferentes de 10 bits há? E de  $n$  bits?
- R2 Quantas sequências diferentes de 10 símbolos do alfabeto (A,C,G,T) há? E de  $n$  símbolos do mesmo alfabeto?
- R3 Um teste tem  $n$  perguntas com respostas possíveis Verdadeiro ou Falso. Forneça uma expressão para calcular o número de maneiras diferentes de responder ao teste. Qual a probabilidade de acertar todas as respostas, escolhendo-as à sorte com igual probabilidade?
- R4 Quantas chaves distintas pode ter o Totoloto antigo (5 números em 49)? E o Euromilhões (5 números em 50 e duas estrelas em 11)?
- R5 Considere um baralho com 20 cartas. Dessas cartas, 10 são vermelhas e numeradas de 1 a 10. As restantes 10 são pretas e também numeradas de 1 a 10.
- (a) De quantas maneiras diferentes se podem dispor as 20 cartas numa fila?
- (b) Calcule a probabilidade de se obter uma sequência constituída alternadamente por cartas pretas e vermelhas.

<sup>2</sup>O espaço de amostragem,  $S$ , é o conjunto de todos os resultados possíveis para a experiência aleatória. Por exemplo, no problema 1  $S = \{0, 1, 2, 3\}$ .

R6 Lançam-se dois dados e toma-se nota da soma de pontos obtida.

- (a) Indique o espaço de amostragem (conjunto de valores possíveis) da soma.
- (b) Calcule a probabilidade de se obter a soma 9.

R7 Um conjunto de 50 peças contém 8 peças defeituosas. Escolhem-se aleatoriamente 10 peças. Qual a probabilidade de encontrar 3 defeituosas?

R8 Quantas *passwords* diferentes se podem obter nas seguintes situações:

- (a) comprimento 5 e cada posição contendo um dígito entre 0 e 9;
- (b) comprimento 5 e cada posição contendo uma letra minúscula sem acentos.
- (c) Qual a probabilidade de acertar em cada um dos dois casos anteriores escolhendo uma password aleatoriamente ?
- (d) Qual a alteração ao valor destas probabilidades de fizermos 3 tentativas completamente independentes?