Departamento de Matemática **Universidade de Aveiro**

Álgebra Linear e Geometria Analítica - A

1^o Teste **3 de Novembro de 2023**

Justifique devidamente as respostas a todas as questões

Duração total do teste: 1h30m

---

*(3,5 val.)***1)** Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$, o vetor $b = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ e o sistema de equações lineares $AX = b$, onde $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ é o vetor das incógnitas.

a) Verifique que A é invertível.

b) Verifique que o sistema $AX = b$ tem uma única solução e calcule o valor de y pela regra de Cramer.

*(3 val.)***2)** Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$, o vetor $b = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e o sistema de equações lineares $AX = b$, onde $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ é o vetor das incógnitas. Resolva o sistema $AX = b$, através do método de fatorização $A = LU$.

*(1,5 val.)***3)** Considere uma economia dividida em 3 setores: manufaturação, agricultura e serviços. Por cada unidade de output a manufaturação requer 0.2 unidades do mesmo setor, 0.7 unidades da agricultura e 0 unidades dos serviços. Por cada unidade de output, a agricultura usa 0.4 unidades do seu próprio output, 0.4 unidades da manufaturaçao e 0.1 unidades dos serviços. Por cada unidade de output, os serviços consomem 0.5 unidades dos serviços, 0.2 unidades da manufaturação e 0.2 da agricultura. Sabendo que a demanda final (procura final) é 10 unidades de manufaturação, 5 unidades de agricultura e 10 unidades de serviços. Escreva o modelo de Leontief $x = Cx + d$ para o problema e indique a matriz C e d para este problema.

*(6 val.)***4)** Sejam A e B duas matrizes invertíveis de dimensão 3×3. Considere a equação matricial

$$A^T \cdot X \cdot B^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 6 & -2 & 1 \\ 6 & -2 & 1 \end{bmatrix},$$

onde X é uma matriz de dimensão 3×3.

a) Justifique a seguinte afirmação verdadeira: a matriz X é sempre não invertível quaisquer que sejam as matrizes A, B invertíveis.

b) Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, na equação acima e calcule a matriz X.

*(6 val.)***5)** Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$.

a) Verifique se $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y - 2z\}$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

b) Complete $\langle (1, 1, 0), (-1, 0, 1), (-1, 1, 2) \rangle = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \_\_\_\_\_\_\_\_\}$ e apresente todos os cálculos efetuados.