Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

Álgebra Linear e Geometria Analítica

Agrupamento IV

26/11/2021 **1º Teste** **Duração: 1h45min**

Justifique detalhadamente todas as respostas. Apresente todos os cálculos.

(3.0) 1. Efetue a discussão do sistema seguinte com parâmetros reais $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x - \beta y + 2z = 6(\alpha - 1) \\ -4\beta y + z = -4 \\ -z = -2\alpha \end{cases}$$

Indique para que valores dos parâmetros o sistema é

(i) possível e determinado,

(ii) possível e indeterminado,

(iii) impossível.

(4.0) 2. Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$.

(a) Obtenha uma matriz C equivalente por linhas a A, na forma escalonada.

(b) Calcule a entrada $(3,2)$ da matriz adjunta de A

(3.0) 3. (a) Justifique que:
Se A é uma matriz de ordem m e o sistema $AX = B$ é possível e determinado então, para qualquer C, $m \times 1$, o sistema $AX = C$ tem solução única.

(b) A afirmação da alínea anterior é ainda verdadeira se A é uma matriz $m \times n$, com $m > n$? Justifique.

(6.0) 4. (a) Use propriedades dos determinantes e, eventualmente, o Teorema de Laplace, para mostrar que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b), \qquad \text{onde } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

(b) Verifique se a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}$ é uma matriz invertível.

(c) Diga, justificando, qual é o volume do paralelepípedo com arestas correspondentes aos vetores $u = (1,1,1)$, $v = (1,2,4)$ e $w = (1,3,9)$.

(d) Calcule a área do paralelogramo de lados $u = (1,1,1)$ e $v = (1,2,4)$.

(4.0) 5. Considere os planos $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ de equações gerais $x + y - z = 2$ e $2x - 2y - z = 5$, respectivamente.

(a) Verifique que $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ são concorrentes e apresente uma equação vetorial ou equações paramétricas da reta $\mathcal{R}$ resultante da interseção dos planos.

(b) Determine a distância do ponto $A(1,1,0)$ ao plano $\mathcal{P}_2$.