

### Resolução da questão 3

(a)  $f$  é diferenciável em  $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  por ser o produto da função identidade (diferenciável) com uma composição de funções diferenciáveis (exponencial após tangente, esta última diferenciável em  $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ ). Nesse intervalo temos

$$f'(x) = e^{\tan x} + e^{\tan x}(\sec^2 x) x = e^{\tan x}(1 + x \sec^2 x),$$

cujo sinal é dado pelo segundo fator. Este calculado em  $-\frac{\pi}{4}$  devolve-nos o valor  $1 - \frac{\pi}{2}$ , que é negativo, logo  $f'(-\frac{\pi}{4}) < 0$ . Como  $f'$  é contínua em  $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  (a justificação é análoga à feita acima para a diferenciabilidade de  $f$ ), então tem que haver um intervalo aberto contendo  $-\frac{\pi}{4}$  e contido em  $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  onde  $f'$  se mantém menor do que zero. Assim, para além de ser diferenciável nesse intervalo,  $f$  é aí estritamente decrescente, logo injetiva, logo invertível.

**Aparte:** Alguns alunos acharam que poderiam concluir a injetividade da função em  $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  pelo facto de as funções  $e^{\tan x}$  e  $x$  serem aí estritamente crescentes, julgando que o produto de funções estritamente crescentes seria sempre estritamente crescente. Ora, isso é falso, sendo a função presente um exemplo disso.

(b) Pelo Teorema da derivada da função inversa, e atendendo a que, como vimos acima,  $f'(-\frac{\pi}{4})$  não é zero,

$$(f^{-1})'\left(f\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{1}{f'\left(-\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{e^{-1}\left(1 - \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{2e}{2 - \pi}.$$