Álgebra Linear e Geometria Analítica

Cónicas e Quádricas

Departamento de Matemática Universidade de Aveiro

Equação geral de uma cónica

Dados $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ não simultaneamente nulos e $\delta, \eta, \mu \in \mathbb{R}$,

$$\alpha\, x^2 + \beta\, y^2 + 2\,\gamma\, x\, y + \delta\, x + \eta\, y + \mu \;=\; 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}}_{X^T} \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \gamma & \beta \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{X} + \underbrace{\begin{bmatrix} \delta & \eta \end{bmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{X} + \mu \;=\; 0$$

$$\Updownarrow$$

$$X^T A\, X \;+\; B\, X \;+\; \mu \;=\; 0,$$

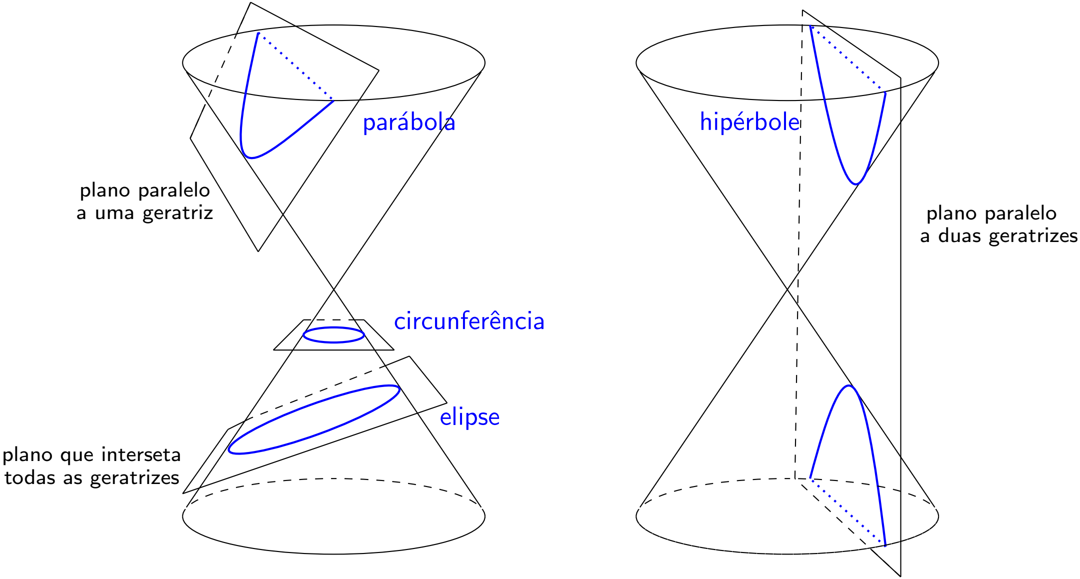
com A matriz simétrica 2×2 não nula e B matriz 1×2, é a equação geral que as coordenadas $X \in \mathbb{R}^2$ dos pontos de uma cónica satisfazem.

Secções cónicas

Uma superfície cónica é uma superfície gerada por uma reta que roda em torno de um eixo, com um ponto fixo sobre este, e mantendo constante o seu ângulo com o eixo. As diferentes posições da reta ao rodar em torno do eixo são conhecidas por geratrizes da superfície cónica.

As cónicas são curvas obtidas pela interseção de um plano com uma superfície cónica.

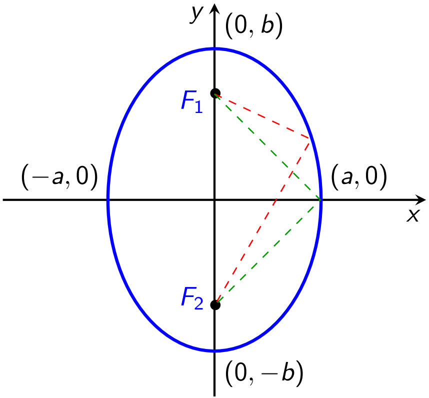
Secções cónicas



https://github.com/ridlo/tikz_by_example/blob/master/conicSection.tex

Equação reduzida de uma elipse

A soma das distâncias de cada ponto da elipse a dois pontos fixos, os focos F_1 e F_2, é constante. Esta constante coincide com o comprimento do eixo maior da elipse, que nesta figura é $2b$.



Equação reduzida:

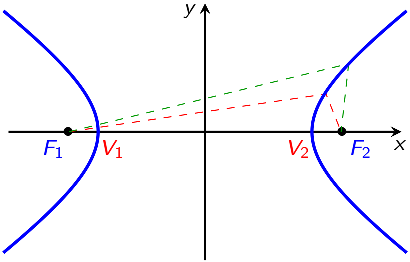
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a, b > 0$$

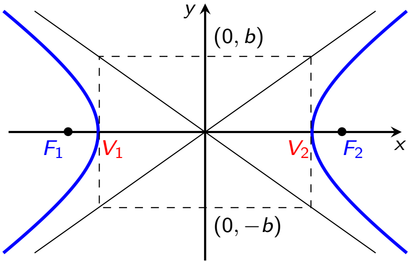
$a < b \longrightarrow$ o eixo maior da elipse está no eixo OY (figura nesta página)
$a > b \longrightarrow$ o eixo maior da elipse está no eixo OX
$a = b \longrightarrow$ a elipse é uma circunferência com raio $a (= b)$

Equação reduzida de uma hipérbole

A diferença absoluta das distâncias de cada ponto da hipérbole aos focos é constante e coincide com a distância entre os vértices da hipérbole, que nesta figura é $2a$.

Focos: $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$; vértices: $V_1(-a, 0)$ e $V_2(a, 0)$.





A distância dos pontos $(0, -b)$ e $(0, b)$ aos vértices V_1 e V_2 é igual a c.

Equação reduzida:

- $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \ a, b > 0$, é a equação de uma hipérbole com vértices no eixo OX (ver figura).
- $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \ a, b > 0$, é a equação de uma hipérbole com vértices no eixo OY.

Equação reduzida de uma parábola

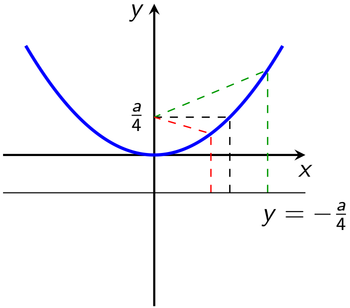
Uma parábola também pode ser definida como o conjunto de pontos do plano equidistantes de um ponto - o foco - e de uma reta - a diretriz.

Equação reduzida:

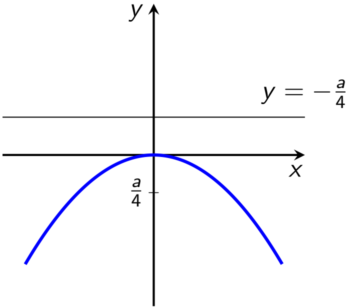
- $x^2 = ay$ é a equação de uma parábola simétrica em relação ao eixo OY (ver figuras);
- $y^2 = ax$ é a equação de uma parábola simétrica em relação ao eixo OX.

Parábola com foco $(0, \frac{a}{4})$ e diretriz $y = -\frac{a}{4}$:

$a > 0$



$a < 0$



Diagonalização ortogonal de A

Pode simplificar-se a equação geral de uma cónica

$$X^T A X + B X + \mu = 0$$

efetuando a diagonalização ortogonal da matriz simétrica A.

Seja P uma matriz ortogonal tal que

$$P^T A P = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix},$$

onde os valores próprios λ_1 e λ_2 de A estão ordenados do seguinte modo:

- $\lambda_1 \geq \lambda_2$, se ambos são não nulos;
- $\lambda_2 = 0$, se um dos valores próprio é nulo.

Redução da equação de uma cónica

Considerando $X = P\hat{X}$ e $\hat{B} = B\,P$ na equação das cónicas, obtém-se

$$\hat{X}^T P^T A\, P\, \hat{X} + B\, P\, \hat{X} + \mu = \hat{X}^T D\, \hat{X} + \hat{B}\, \hat{X} + \mu = 0$$

que, para $\hat{X} = \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix}$ e $\hat{B} = \begin{bmatrix} \hat{\delta} & \hat{\eta} \end{bmatrix}$, é equivalente a

$$\begin{bmatrix} \hat{x} & \hat{y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{\delta} & \hat{\eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix} + \mu = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\lambda_1\, \hat{x}^2 + \lambda_2\, \hat{y}^2 + \hat{\delta}\hat{x} + \hat{\eta}\hat{y} + \mu = 0,$$

onde o termo cruzado (termo em "xy") foi eliminado.
A técnica para eliminar os termos $\hat{B}\hat{X}$ ou μ, quando possível, será mostrada nos exemplos.

Nota: Se $|P| > 0$, esta mudança de variável corresponde a uma rotação.

Exemplo 1

$$x^2 + y^2 + 4xy - 2x + 2y - 6 = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$X^T A X + B X - 6 = 0$$

com

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

No Exemplo 5 do Capítulo 5 (slide 18) efetuou-se a diagonalização ortogonal da matriz simétrica A, tendo-se obtido

$$P^T A P = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \text{com} \qquad P = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

uma matriz ortogonal.

Exemplo 1 – continuação

Considerando $X = P\,\hat{X}$, obtém-se

$$\hat{X}^T\, P^T A\, P\, \hat{X} \,+\, B P\, \hat{X} = 6.$$

Tomando $\hat{X} = \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix}$ e atendendo a que $BP = \begin{bmatrix} 0 & 2\sqrt{2} \end{bmatrix}$, obtém-se

$$\begin{aligned} 3\hat{x}^2 - \hat{y}^2 + 2\sqrt{2}\hat{y} = 6 \iff\ & 3\hat{x}^2 - (\hat{y}^2 - 2\sqrt{2}\hat{y} + 2) = 6 - 2 \\ \iff\ & 3\hat{x}^2 - (\underbrace{\hat{y} - \sqrt{2}}_{\tilde{y}})^2 = 4 \\ & \tilde{x} = \hat{x} \\ \iff\ & \frac{\tilde{x}^2}{\frac{4}{3}} - \frac{\tilde{y}^2}{4} = 1. \end{aligned}$$

Esta última é a equação reduzida de uma hipérbole.

Nota: A mudança de variável $\tilde{y} = \hat{y} - \sqrt{2}$ corresponde a uma translação.

Exemplo 2

$$
\begin{gathered}
2x^2 + y^2 + 12x + 4y + 18 \; = \; 0 \\
\Updownarrow \\
2\left(x^2 + 6x + 9\right) - 18 + \left(y^2 + 4y + 4\right) - 4 + 18 \; = \; 0 \\
\Updownarrow \\
2\,(\underbrace{x+3}_{\tilde{x}})^2 + (\underbrace{y+2}_{\tilde{y}})^2 = 4 \\
\Updownarrow \\
\frac{\tilde{x}^2}{2} + \frac{\tilde{y}^2}{4} = 1.
\end{gathered}
$$

Esta última é a equação reduzida de uma elipse.

Exemplo 3

$$2x^2 + 12x + 3y + 15 = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$2\left(x^2 + 6x + 9\right) - 18 + 3y + 15 = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$2(\underbrace{x+3}_{\tilde{x}})^2 + 3(\underbrace{y-1}_{\tilde{y}}) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\tilde{x}^2 = -\tfrac{3}{2}3\tilde{y}.$$

Esta é a equação reduzida de uma parábola.

Exemplos de equações que não correspondem a curvas

Exemplo 4:

$$2x^2 + y^2 + 12x + 4y + 24 = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$2\left(x^2 + 6x + 9\right) - 18 + \left(y^2 + 4y + 4\right) - 4 + 24 = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$2\,(x+3)^2 + (y+2)^2 = -2.$$

Esta é a equação de um conjunto vazio.

Exemplo 5:

$$2x^2 + y^2 + 12x + 4y + 22 = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$2\,(x+3)^2 + (y+2)^2 = 0.$$
$$\Updownarrow$$
$$x = -3 \quad \text{e} \quad y = -2.$$

Esta é a equação de um ponto.

Cónicas degeneradas

Situações degeneradas que podem ocorrer:

1. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1 \quad \rightarrow$ conjunto vazio;
2. $\frac{x^2}{a^2} = -1 \quad \rightarrow$ conjunto vazio;
3. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0 \quad \rightarrow$ um ponto (origem do referencial);
4. $\frac{x^2}{a^2} = 0 \quad \rightarrow$ duas retas coincidentes (eixo Oy, $x = 0$);
5. $\frac{x^2}{a^2} = 1 \quad \rightarrow$ duas retas estritamente paralelas ($x = \pm a$);
6. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \quad \rightarrow$ duas retas concorrentes ($y = \pm \frac{b}{a} x$).

Identificação de cónicas com 2 valores próprios não nulos

Identificação da cónica representada pela equação

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \mu = 0.$$

Caso 1. λ_1 e λ_2 têm o mesmo sinal, ou seja, $|A| > 0$

μ e λ_1 têm sinais contrários	elipse
μ e λ_1 têm o mesmo sinal	conjunto vazio
$\mu = 0$	um ponto: $(0, 0)$

Caso 2. λ_1 e λ_2 têm sinais contrários, ou seja, $|A| < 0$

$\mu \neq 0$	hipérbole
$\mu = 0$	duas retas concorrentes: $y = \pm\sqrt{-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}\, x$

Identificação de cónicas com 1 valor próprio não nulo

Identificação da cónica representada pela equação (onde $|A| = 0$)

$$\lambda_1 x^2 + \eta\, y + \mu = 0.$$

Caso 1. $\eta \neq 0 \;\rightarrow\;$ parábola

Caso 2. $\eta = 0$

μ e λ_1 têm o mesmo sinal	conjunto vazio
μ e λ_1 têm sinais contrários	duas retas estritamente paralelas: $x = \pm\sqrt{-\frac{\mu}{\lambda_1}}$
$\mu = 0$	duas retas coincidentes: $x = 0$ (eixo Oy)

Equação geral de uma quádrica

A equação geral (na forma matricial) de uma quádrica é

$$X^T A X + B X + \mu = 0, \tag{1}$$

com A matriz simétrica 3×3 não nula, B matriz 1×3, $X \in \mathbb{R}^3$ e $\mu \in \mathbb{R}$.

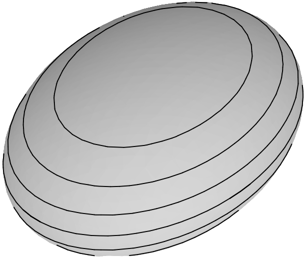
A partir desta equação geral podem ser obtidas as equações reduzidas das quádricas por um processo análogo ao levado a cabo para as cónicas:

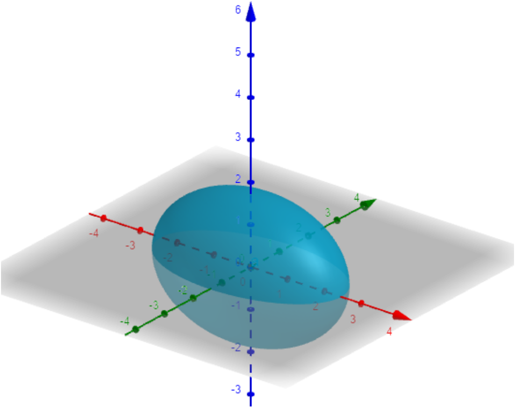
1. "rotação" dos eixos (diagonalização ortogonal de A) e
2. "translação" dos eixos.

Exercício: Determine as interseções com os planos coordenados ($x = 0$, $y = 0$ e $z = 0$) de todas as quádricas apresentadas nos próximos 5 slides.

Equação reduzida do elipsóide

Equação reduzida de um elipsóide: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1.$





Nota: No caso particular $a = b = c$, tem-se uma esfera.

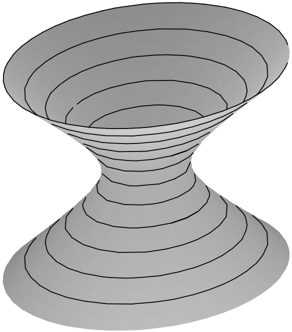
Equações reduzidas dos hiperbolóides

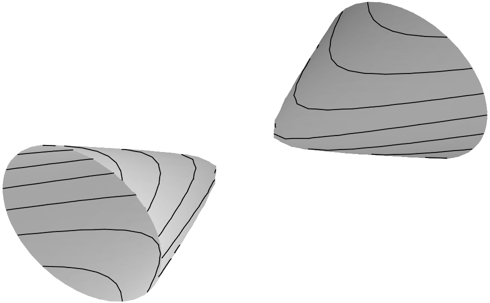
Equação reduzida de um hiperbolóide de uma folha:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Equação reduzida de um hiperbolóide de duas folhas:

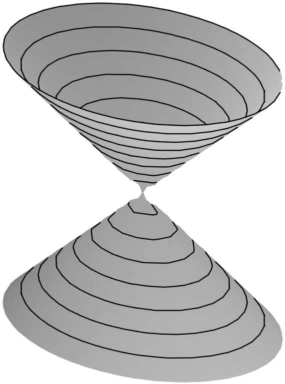
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$





Quádricas degeneradas: o cone

Equação reduzida de um cone: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0.$



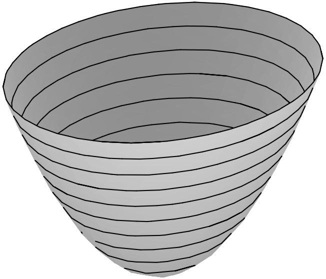
Equações reduzidas dos parabolóides

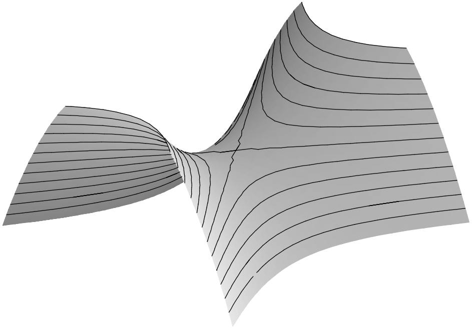
Equação reduzida de um parabolóide elíptico:

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}.$$

Equação reduzida de um parabolóide hiperbólico:

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}.$$





Quádricas degeneradas: os cilindros

Equação reduzida de um cilindro elíptico:

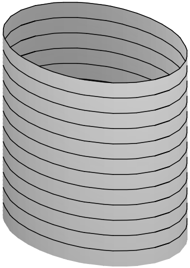
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

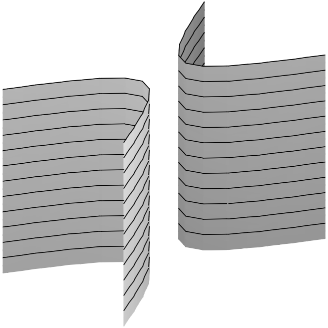
Equação reduzida de um cilindro hiperbólico:

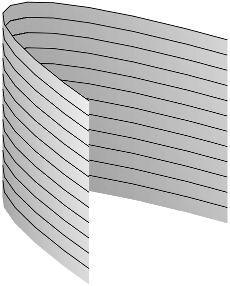
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Equação reduzida de um cilindro parabólico:

$$y = ax^2.$$







Exemplo 6

$$-8x^2 - 8y^2 + 10z^2 + 32xy - 4xz - 4yz - 24 = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$X^T A X = 24,$$

com $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ e $A = \begin{bmatrix} -8 & 16 & -2 \\ 16 & -8 & -2 \\ -2 & -2 & 10 \end{bmatrix}$.

Como os valores próprios de A são 12, 6 e -24, existe P ortogonal tal que

$$P^T A P = D = \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -24 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 6 – continuação

Considerando $X = P\,\hat{X}$ na equação geral, com $\hat{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, obtém-se

$$\begin{aligned} X^T A X = 24 \iff\; & \hat{X}^T D \hat{X} = 24 \\ \iff\; & 12\hat{x}^2 + 6\hat{y}^2 - 24\hat{z}^2 = 24 \\ \iff\; & \frac{\hat{x}^2}{2} + \frac{\hat{y}^2}{4} - \hat{z}^2 = 1 \end{aligned}$$

que é a equação reduzida de um hiperbolóide de uma folha.

Nota: As interseções com os eixos coordenados são:

$\hat{x} = 0$	$\rightarrow$	$\frac{\hat{y}^2}{4} - \hat{z}^2 = 1$	hipérbole no plano $\hat{y}O\hat{z}$
$\hat{y} = 0$	$\rightarrow$	$\frac{\hat{x}^2}{2} - \hat{z}^2 = 1$	hipérbole no plano $\hat{x}O\hat{z}$
$\hat{z} = 0$	$\rightarrow$	$\frac{\hat{x}^2}{2} + \frac{\hat{y}^2}{4} = 1$	elipse no plano $\hat{x}O\hat{y}$

Identificação de quádricas com 3 valores próprios não nulos

Identificação da quádrica representada pela equação

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + \mu = 0.$$

Caso 1. λ_1, λ_2 e λ_3 têm o mesmo sinal

μ e λ_1 têm sinais contrários	elipsóide
μ e λ_1 têm o mesmo sinal	conjunto vazio
$\mu = 0$	ponto $(0, 0, 0)$

Caso 2. λ_1 e λ_2 têm o mesmo sinal que é contrário ao de λ_3

μ e λ_1 têm sinais contrários	hiperbolóide de uma folha
μ e λ_1 têm o mesmo sinal	hiperbolóide de duas folhas
$\mu = 0$	*cone*

Identificação de quádricas com 2 valores próprios não nulos

Identificação da quádrica representada pela equação

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \eta z + \mu = 0.$$

Caso 1. λ_1 e λ_2 têm o mesmo sinal

$\eta \neq 0 \rightarrow$ parabolóide elíptico

$\eta = 0 \rightarrow$

μ e λ_1 têm sinais contrários	*cilindro elíptico*
μ e λ_1 têm o mesmo sinal	conjunto vazio
$\mu = 0$	eixo Oz

Caso 2. λ_1 e λ_2 têm sinal contrário

$\eta \neq 0 \rightarrow$ parabolóide hiperbólico

$\eta = 0 \rightarrow$

$\mu \neq 0$	*cilindro hiperbólico*
$\mu = 0$	dois planos concorrentes $y = \pm\sqrt{-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}\, x$ que se intersetam no eixo Oz

Identificação de quádricas com 1 valor próprio não nulo

Identificação da quádrica representada pela equação

$$\lambda_1 x^2 + \eta\, y + \mu = 0.$$

Caso 1. $\eta \neq 0 \ \rightarrow$ *cilindro parabólico*

Caso 2. $\eta = 0$

μ e λ_1 têm sinais contrários	dois planos estritamente paralelos: $x = \pm\sqrt{-\frac{\mu}{\lambda_1}}$
μ e λ_1 têm o mesmo sinal	conjunto vazio
$\mu = 0$	dois planos coincidentes: $x = 0$ (plano yOz)

Nota: Na equação $\lambda_1 x^2 + \eta y + \nu z + \mu = 0$, o termo em z elimina-se com uma oportuna escolha da base do espaço próprio associado a zero.