Cálculo II - Agrup. 4, 2020/21

Alexandre Almeida
(DMat - UA)

abril 2021

CAPÍTULO 3

Extremos de funções reais de várias variáveis reais
(parte 2)

– material de apoio –

Conteúdos

3.5 Extremos globais, extremos locais e extremos condicionados

Definição (extremos globais / locais)

Sejam $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $p \in D$. Diz-se que:

- $f(p)$ é o **máximo global** (ou **absoluto**) de f se $f(x) \leq f(p),\ \forall x \in D$.
- $f(p)$ é o **mínimo global** (ou **absoluto**) de f se $f(x) \geq f(p),\ \forall x \in D$.
- $f(p)$ é um **máximo local** (ou **relativo**) de f se existir $r > 0$ tal que $f(x) \leq f(p),\ \forall x \in D \cap B_r(p)$.
- $f(p)$ é um **mínimo local** (ou **relativo**) de f se existir $r > 0$ tal que $f(x) \geq f(p),\ \forall x \in D \cap B_r(p)$.

Um **extremo** de f é um qualquer seu máximo ou mínimo. Os pontos p onde os extremos são atingidos designam-se por **extremantes** (maximizantes ou minimizantes, consoante o caso).

Existência de extremos absolutos

Teorema (de Weierstrass)

Se $D \subseteq \mathbb{R}^n$ é um conjunto fechado e limitado e $f : D \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, então f atinge os seus valores máximo e mínimo em D, ou seja, existem $p, q \in D$ tais que

$$f(p) \leq f(x) \leq f(q), \qquad \forall x \in D.$$

Exemplo

A função $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$ possui extremos globais no conjunto

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

Quais são esses valores? Em que pontos são atingidos?

Em $\mathbb{R}^2$, o máximo (global) de f é $4 = f(0, 0)$, mas f não tem mínimo global neste conjunto. No entanto, tal não contradiz o Teorema de Weierstrass! Porquê?

Existência de extremos locais (condição necessária)

Teorema (de Fermat)

Seja $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciável em $p \in int(D)$. Se $f(p)$ é um extremo de f, então $\nabla f(p) = (0, \dots, 0)$.

Definição (pontos críticos)

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciável em $p \in int(D)$. Diz-se que p é um **ponto crítico de f** se $\nabla f(p) = (0, \dots, 0)$.

Exemplo

A função

$$f(x, y) = -3x^2y - y^3 + 2x^2 + 2y^2 + 1$$

tem quatro pontos críticos: $(0, 0)$; $\left(0, \frac{4}{3}\right)$; $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$; $\left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$; Verifique!

Mais adiante veremos se estes pontos são, ou não, extremantes.

Sugestão: Usar o GeoGebra3D para uma análise prévia ao comportamento da função f junto a estes pontos.

Classificação dos pontos críticos: pontos de sela

Definição

Seja $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciável em $p \in int(D)$. Se p é ponto crítico de f mas não é um seu extremante, então p diz-se um **ponto de sela de f**.

Exemplo (ponto crítico / ponto de sela)

O único ponto crítico das funções $f(x, y) = x^2 + y^2$ e $g(x, y) = x^2 - y^2$ é o ponto $(0, 0)$. No entanto,

- $f(0, 0) = 0$ é (o único) extremo de f (é mínimo absoluto).
- $g(0, 0) = 0$ não é extremo de g. De facto, em qualquer bola $B_r((0, 0))$ tem-se

  $$(x_0, 0) \in B_r((0, 0)) \quad \text{e} \quad (0, y_0) \in B_r((0, 0)) \qquad \text{se} \;\; x_0, y_0 \in]0, r[;$$

  mas

  $$g(x_0, 0) = x_0^2 > 0 = g(0, 0) \quad \text{e} \quad g(0, y_0) = -y_0^2 < 0 = g(0, 0).$$

Matriz hessiana

Definição (matriz hessiana e determinante hessiano)

Sejam $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $p \in int(D)$. Supondo que existem as derivadas parciais de segunda ordem de f no ponto p, a (matriz) **hessiana** de f em p é a matriz $n \times n$

$$H_f(p) = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p) \right]_{i,j=1}^{n} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}_{(p)} .$$

O determinante de $H_f(p)$ designa-se por (determinante) **hessiano** de f em p.

Nota: A hessiana $H_f(p)$ é sempre uma matriz simétrica quando f é de classe C^2 numa bola centrada em p (porquê ?).

Classificação dos pontos críticos via valores próprios

Proposição (teste dos valores próprios da hessiana)

Sejam $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $p \in int(D)$ um ponto crítico de f. Suponha-se que f é de classe C^2 numa bola centrada em p. Então:

1. *se todos os valores próprios de $H_f(p)$ forem positivos, $f(p)$ é mínimo local de f.*
2. *se todos os valores próprios de $H_f(p)$ forem negativos, $f(p)$ é máximo local de f.*
3. *se $H_f(p)$ tiver pelo menos um valor próprio positivo e um outro negativo, p é ponto de sela de f.*

Nota: Sob as hipóteses indicadas, a hessiana $H_f(p)$ é necessariamente uma matriz simétrica, pelo que possui n valores próprios reais (podendo estes ser repetidos).

Classificação dos pontos críticos via menores

Corolário (teste dos menores principais da hessiana)

Sob as hipóteses da proposição anterior, se $\det(H_f(p)) \neq 0$, então:

1. *se todos os menores principais de $H_f(p)$ forem positivos, $f(p)$ é um mínimo local de f.*
2. *se os menores principais de $H_f(p)$ forem alternadamente negativos e positivos, começando o primeiro por ser negativo, $f(p)$ é máximo local de f.*
3. *se nenhuma das situações anteriores ocorrer, p é ponto de sela de f.*

Nota: Repare-se que o caso 3 acima ocorre quando existir um menor de ordem par negativo ou dois menores de ordem ímpar com sinais diferentes (pelo que p é ponto de sela de f em tais casos).

Recordar: Os menores principais de uma matriz $\left[a_{ij}\right]_{i,j=1}^{n}$ são os determinantes

$$\det\left(\left[a_{ij}\right]_{i,j=1}^{k}\right), \quad k = 1, \ldots, n.$$

Corolário (teste das segundas derivadas - caso de 2 variáveis)

Sejam $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *e* $(a, b) \in int(D)$*. Suponha-se que* $\nabla f(a, b) = (0, 0)$*,* f *é de classe* C^2 *numa bola centrada em* (a, b) *e* $\det(H_f(a, b)) \neq 0$*.*

- *Se* $\det(H_f(a, b)) > 0$ *e* $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) > 0$*, então* $f(a, b)$ *é mínimo local.*
- *Se* $\det(H_f(a, b)) > 0$ *e* $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) < 0$*, então* $f(a, b)$ *é máximo local.*
- *Se* $\det(H_f(a, b)) < 0$*, então* (a, b) *é ponto de sela de* f*.*

Vejamos alguns exemplos de determinação de extremos locais, onde as funções envolvidas são do tipo polinomial e, portanto, de classe C^2 (o que, à partida, permite usar o critério indicado).

Classificação dos pontos críticos - exemplo 1

Seja $f(x,y) = -3x^2y - y^3 + 2x^2 + 2y^2 + 1$.

- Pontos críticos: $(0,0)$, $\left(0, \frac{4}{3}\right)$, $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $\left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$.
- Hessiana: $H_f(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-6y & -6x \\ -6x & 4-6y \end{bmatrix}$.
- $\det\big(H_f(0,0)\big) = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 16 > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 4 > 0$
  ($(0,0)$ é minimizante local de f).
- $\det\left(H_f\left(0, \frac{4}{3}\right)\right) = \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = 16 > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(0, \frac{4}{3}\right) = -4 < 0$
  ($\left(0, \frac{4}{3}\right)$ é maximizante local de f).
- $\det\left(H_f\left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)\right) = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -16 < 0$ ($\left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ é ponto de sela de f).
- $\det\left(H_f\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)\right) = \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = -16 < 0$ ($\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ é ponto de sela de f).

Classificação dos pontos críticos - exemplo 2

Seja $f(x,y) = x^4 + x^2 + y^3$.

- Pontos críticos: $(0,0)$.
- Hessiana: $H_f(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12x^2+2 & 0 \\ 0 & 6y \end{bmatrix}$
- $\det\big(H_f(0,0)\big) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$ (o teste anterior não se pode aplicar!)
- Análise direta da função na vizinhança de $(0,0)$: toda a bola centrada na origem possui pontos da forma $(0,y)$, com $y \in \mathbb{R}$. Como

$$f(0,y) = y^3 < 0 \quad \text{se} \quad y < 0 \quad \text{e} \quad f(0,y) = y^3 > 0 \quad \text{se} \quad y > 0,$$

conclui-se que $(0,0)$ não é extremante de f (é ponto de sela).

Exercício: Verifique que $(0,0)$ é também o único ponto crítico da função $g(x,y) = x^4 + x^2 + y^4$. No entanto, neste caso, $(0,0)$ é minimizante (global), apesar de o hessiano ser igualmente nulo neste ponto.

Classificação dos pontos críticos - exemplo 3

Seja $f(x,y,z) = x + (y-1)(x - \ln z) - \ln x$.

- Pontos críticos: $(1,1,e)$.
- Hessiana: $H_f(x,y,z) = \begin{bmatrix} \frac{1}{x^2} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{z} \\ 0 & -\frac{1}{z} & \frac{y-1}{z^2} \end{bmatrix}, \qquad x > 0 \wedge z > 0.$
- Menores principais da hessiana no ponto $(1,1,e)$:
  $\det[1] = 1, \quad \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -1, \quad \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -e^{-1} \\ 0 & -e^{-1} & 0 \end{bmatrix} = -e^{-2}.$
- Como o menor de ordem par é negativo, $(1,1,e)$ é ponto de sela da função f. A conclusão também pode ser justificada pelo facto dos menores de ordem ímpar terem sinais diferentes.

Procedimento para o cálculo de extremos absolutos

Atendendo ao Teorema de Weierstrass e ao Teorema de Fermat, para se calcular os extremos absolutos de uma **função contínua** num **conjunto limitado e fechado**, podemos proceder do seguinte modo:

1. identificar os pontos críticos da função no interior do conjunto;
2. considerar os pontos interiores onde pelo menos uma das derivadas parciais da função não esteja definida;
3. considerar os pontos da fronteira do conjunto;
4. calcular o valor da função em cada um dos pontos identificados nos passos anteriores (o menor desses valores será o mínimo global e o maior valor será o máximo global).

Exemplo

Determinar os extremos absolutos da função f em D, onde
$f(x,y) = x^2 + y^2 - x - y + 1$ e $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.
(tais extremos existem uma vez que f é contínua e D é fechado e limitado).

1. O único ponto crítico de f no interior de D é $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ (embora tal não seja necessário para concluir, pelo teste das segundas derivadas pode concluir-se que este ponto é um minimizante local de f);
2. Como f é diferenciável em todos os pontos interiores de D, não há candidatos adicionais neste passo;
3. Considerar os pontos situados na circunferência $\mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$, a qual pode ser interpretada como imagem de uma função (caminho) de uma só variável:

$$r(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t), \qquad t \in [0, 2\pi].$$

A composição $(f \circ r)(t) = 2 - \cos t - \operatorname{sen} t$ dá, para $t \in [0, 2\pi]$, os mesmos valores de f em $\mathcal{C}$. Sendo contínua no intervalo fechado e limitado $[0, 2\pi]$, então $f \circ r$ tem extremos absolutos neste intervalo. Os candidatos a extremantes de $f \circ r$ são os pontos críticos $t = \frac{\pi}{4}$ e $t = \frac{5\pi}{4}$ e os pontos fronteiros $t = 0$ e $t = 2\pi$.

3. (cont.)
$r(0) = r(2\pi) = (1, 0)$,

$$r(\pi/4) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad \text{e} \quad r(5\pi/4) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right);$$

4. Temos:

$$f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2};\ f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2 - \sqrt{2};\ f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2 + \sqrt{2};\ f(1, 0) = 1$$

O máximo absoluto de f é $2 + \sqrt{2}$ e é atingido em $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

O mínimo absoluto de f é $\dfrac{1}{2}$ e é atingido em $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Extremos condicionados

No passo 3 do exemplo anterior procurámos os extremos da função $f(x,y) = x^2 + y^2 - x - y + 1$ quando restrita à curva de nível $x^2 + y^2 = 1$. Mais geralmente (a 2 variáveis), trata-se de um exemplo de determinação de extremos condicionados, do tipo

$$\text{maximizar / minimizar } f(x,y) \quad \text{sob a condição} \quad g(x,y) = c.$$

(no exemplo concreto temos $g(x,y) = x^2 + y^2$ e $c = 1$).

Abordagem alternativa: suponha-se que g é diferenciável e que a curva de nível $g(x,y) = c$ é descrita por um caminho $r(t)$. Por um lado, sabe-se que o gradiente $\nabla g(x_0, y_0)$ é ortogonal aos vetores tangentes à curva de nível em $(x_0, y_0) = r(t_0)$. Por outro lado, se f e r forem diferenciáveis e se t_0 for um extremante de $f \circ r$ (interior ao domínio desta função), pela regra da cadeia

$$0 = (f \circ r)'(t_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot r'(t_0).$$

Assim, $\nabla f(x_0, y_0)$ é também ortogonal aos vetores tangentes à curva em (x_0, y_0), pelo que $\nabla f(x_0, y_0)$ e $\nabla g(x_0, y_0)$ são colineares. Portanto, o ponto (x_0, y_0) terá de ser solução de

$$\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y)$$

para algum $\lambda \in \mathbb{R}$, pelo menos nos casos em que $\nabla g(x,y) \neq (0,0)$.

Multiplicadores de Lagrange

Teorema (método dos multiplicadores de Lagrange)

Sejam $D \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto e f, g de classe C^1 em D. Seja $\mathcal{N} = \{x \in D : g(x) = c\}$ (para algum $c \in \mathbb{R}$ dado). Se a restrição de f a $\mathcal{N}$ tem um extremo local num ponto $p \in \mathcal{N}$ para o qual $\nabla g(p) \neq \vec{0}$, então existe $\lambda \in \mathbb{R}$ (dito multiplicador de Lagrange) tal que

$$\nabla f(p) = \lambda \nabla g(p).$$

Nota: O resultado anterior diz-nos que (p, λ) é um ponto crítico da função $\mathcal{L}$ de $(n+1)$ variáveis (conhecida por Lagrangeano) definida por

$$\mathcal{L}(x_1, \ldots, x_n, \lambda) = f(x_1, \ldots, x_n) - \lambda\big(g(x_1, \ldots, x_n) - c\big).$$

Podemos resumir a aplicação do método anterior do seguinte modo:

1. resolver o sistema $\begin{cases} \nabla f(x) = \lambda \nabla g(x) \\ g(x) = c \end{cases}$, para $\nabla g(x) \neq \vec{0}$.
2. Verificar se existe $x \in \mathcal{N}$ tal que $\nabla g(x) = \vec{0}$
3. Calcular o valor de f nos pontos identificados nos passos 1 e 2.

Multiplicadores de Lagrange - exemplo de aplicação

Exemplo: Determinar os extremos da função $f(x,y) = x^2 + y^2 - x - y + 1$ ao longo da circunferência $\mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$, ou seja, max./min. $f(x,y)$ sujeita à restrição $g(x,y) = 1$, onde $g(x,y) = x^2 + y^2$:

1. $$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \\ g(x,y) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 = \lambda 2x \\ 2y - 1 = \lambda 2y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \underset{(\lambda \neq 1)}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x = \frac{1}{2(1-\lambda)} \\ y = \frac{1}{2(1-\lambda)} \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

   Substituindo as quantidades x e y na terceira equação do sistema, obtemos os multiplicadores $\lambda = 1 - 1/\sqrt{2}$ e $\lambda = 1 + 1/\sqrt{2}$ e os correspondentes candidatos a extremantes

   $$(x,y) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad \text{e} \quad (x,y) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

2. A condição $\nabla g(x,y) = (0,0)$ não dá origem a nenhum candidato, pois tal equivale a $(x,y) = (0,0)$ mas este ponto não pertence à circunferência $\mathcal{C}$.
3. Sendo f contínua e $\mathcal{C}$ um conjunto fechado e limitado de $\mathbb{R}^2$, pelo Teorema de Weierstrass f possui extremos absolutos neste conjunto:

Multiplicadores de Lagrange - exemplo de aplicação (cont.)

3. (cont.)

   O máximo absoluto de f em $\mathcal{C}$ é $2+\sqrt{2}$ e é atingido em $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

   O mínimo absoluto de f em $\mathcal{C}$ é $2-\sqrt{2}$ e é atingido em $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Nota: Em comparação com o passo 3 da abordagem seguida nos slides 15-16, repare-se que o ponto $(1,0)$ não aparece agora como candidato a extremante por aplicação do método dos multiplicadores de Lagrange (na verdade, $(1,0)$ não é extremante e surgiu na altura associado à "parametrização" escolhida para a circunferência).

Referências

- A. Breda, J. Costa, *Cálculo com funções de várias variáveis*, McGraw-Hill, 1996.
- A. Caetano, Wiki de Cálculo (`http://calculo.wikidot.com`)
- F.R. Dias Agudo, *Análise Real, Vol. II*, Escolar Editora, 1990.