2º teste - Cálculo I - agr. 4 - 2021/22

Resolução

4. $g(x) := 2x - 1 - \frac{1}{2}\int_0^x e^{-t^2}\,dt\ ,\ x \in \mathbb{R}$.

(a) (5 pontos) Atendendo a que $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, com $f(t) := e^{-t^2}$, é contínua em qualquer $[a,b]$, $a<b$, o Teorema Fundamental do Cálculo permite escrever que

$$g'(x) = 2 - \frac{1}{2}e^{-x^2}\ ,\ x \in \mathbb{R}.$$

(b) (25 pontos) $g'(x) > 0 \Leftrightarrow 2 - \frac{1}{2}e^{-x^2} > 0 \Leftrightarrow e^{-x^2} < 4$,

condição universal, pois $e^{-x^2} \leq e^0 = 1 < 4$.

Logo $g'(x) > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$, e portanto g é estritamente crescente em $\mathbb{R}$. Consequentemente, $g(x) = 0$ tem no máximo uma solução.

Para ver que tem de facto uma solução:

Ver, na pág. 2, uma alternativa a este caminho.

$$g(0) = 2 \times 0 - 1 - \frac{1}{2}\int_0^0 e^{-t^2}\,dt = -1 < 0.$$

Por outro lado, $\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty}\left(2x - 1 - \frac{1}{2}\int_0^x e^{-t^2}\,dt\right)$

$= +\infty$ se $\lim_{x \to +\infty}\int_0^x e^{-t^2}\,dt$ for finito, ou seja,

se $\lim_{x \to +\infty}\int_1^x e^{-t^2}\,dt$ for finito (já que e^{-t^2}, sendo contínua, é integrável em $[0,1]$).

Sendo g contínua e passando de um valor negativo a valores positivos, o Teorema de Bolzano-Cauchy garante que se anula em algum ponto.

Nota: também se poderia ter usado a comparação $e^{-t^2} \leq \frac{1}{t^2}$ aqui.

Ora $t \geq 1 \Rightarrow -t^2 \leq -t \Rightarrow e^{-t^2} \leq e^{-t}$. Como

$$\lim_{x \to +\infty}\int_1^x e^{-t}\,dt = \lim_{x \to +\infty}\left[-e^{-t}\right]_1^x = \lim_{x \to +\infty}\left(-e^{-x} + \frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e},$$

o integral impróprio $\int_1^{+\infty} e^{-t}\,dt$ converge, logo, por comparação, o mesmo sucede a $\int_1^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$, que era o que faltava provar.

<u>Alternativa</u> para provar que g assume um valor positivo em algum ponto (o que é suficiente para a conclusão final), em vez de provar que $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$:

$$g(10) = 2 \times 10 - 1 - \frac{1}{2} \int_0^{10} e^{-t^2} dt ;$$

Como $0 < e^{-t^2} \leq 1$, então $\int_0^{10} e^{-t^2} dt \leq \int_0^{10} 1 \, dt = 10$,

logo $g(10) \geqslant 20 - 1 - \frac{1}{2} \times 10 = 20 - 6 = 14 > 0$.