Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

Álgebra Linear e Geometria Analítica - agrupamento IV

11/02/2022 **2º teste** duração: **1h45min**

nome: ______________________ nº mecanográfico: ________

declaro que desisto: ______________________ **nº folhas adicionais:** ______

Justifique detalhadamente as respostas.

(6.0) 1. Considere o subespaço $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$ e os vetores $X = (-1, 0, 0)$ e $Y = (0, 1, -1)$.

a) Determine uma base para S e a dimensão de S.

b) Verifique se X e Y são elementos de S. Em caso afirmativo, indique o vetor de coordenadas na base determinada.

c) Determine a projeção ortogonal do vetor $Z = (2, 2, 1)$ no subespaço K gerado por X e Y.

(4.0) 2. Considere a matriz $N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 0 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -k \end{bmatrix}$, onde k é um parâmetro real.

a) Mostre que 1 é valor próprio de N, para qualquer $k \in \mathbb{R}$.

b) Determine os valores de k para os quais $u = (2, 2, -1)$ é um vetor próprio de N. Indique o valor próprio de N que tem u como vetor próprio.

(4.0) 3. Considere a cónica com equação geral $x^2 + 4y^2 + 4xy + 2x - y + 5 = 0$.

a) Sendo $X = [x \quad y]^\top$, determine as matrizes A e B tais que a equação matricial da cónica apresentada seja dada por $X^T AX + BX + 5 = 0$.

b) Encontre uma matriz ortogonal P diagonalizante de A.

c) Obtenha uma equação reduzida da cónica. Classifique a cónica.

(6.0) 4. Seja $\phi \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ uma aplicação linear tal que $\phi(X) = AX$ com $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$.

Seja $\mathcal{C}_4$ a base canónica de $\mathbb{R}^4$ e $\mathcal{B} = ((1, -1), (1, 2))$ uma base de $\mathbb{R}^2$.

a) Determine o núcleo de ϕ.

b) Indique a dimensão de $\mathrm{im}(\phi)$, justificando.

c) ϕ é injetiva? ϕ é sobrejetiva? Justifique.

d) Determine a matriz de ϕ relativa às bases $\mathcal{C}_4$ e $\mathcal{B}$.

e) Seja $C = M(\phi, \mathcal{C}_4, \mathcal{B})$. Sabendo que $CX = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$, determine $\phi(X)$.