Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

Matemática Discreta 2020/2021 - UC 47166 (1ºAno/2ºSem)

EXAME DE RECURSO - RESOLUÇÃO **21/07/2021 Dur: 2h 30m**

Nome: **NMec:** **Curso:**

1. Seja $\mathcal{R}$ a menor relação de ordem parcial definida em $A = \{1, 2, 3, 4\}$, tal que $\{(1, 3), (3, 2), (3, 4)\} \subseteq \mathcal{R}$.

[2.0] (a) Determine $\mathcal{R}$.

[1.0] (b) Considere as relações, $\mathcal{S} = \{(1, 3), (3, 2), (3, 4)\}$ e $\mathcal{T} = \{(2, 1), (3, 4), (4, 3)\}$, ambas definidas em A. Determine $\mathcal{T} \circ \mathcal{S} \circ \mathcal{T}$.

Resposta:

(a) Por definição, $\mathcal{R}$ tem de ser reflexiva, antissimétrica e transitiva.

Sendo $\mathcal{R}$ reflexiva, $(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4) \in \mathcal{R}$. Para quaisquer $a, b \in A$, se $(a, b) \in \mathcal{R}$ então $(b, a) \notin \mathcal{R}$. Como $(1, 3) \in \mathcal{R}$ e $(3, 2) \in \mathcal{R}$, sendo $\mathcal{R}$ transitiva, $(1, 2) \in \mathcal{R}$. Dado que $(1, 3) \in \mathcal{R}$ e $(3, 4) \in \mathcal{R}$, como $\mathcal{R}$ é transitiva, $(1, 4) \in \mathcal{R}$.

Assim, $\mathcal{R} = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (3, 3), (3, 2), (3, 4), (4, 4)\}$.

(b) Relação composta: $\mathcal{T} \circ \mathcal{S} = \{(1, 4), (3, 1), (3, 3)\}$, donde, $\mathcal{T} \circ \mathcal{S} \circ \mathcal{T} = \{(2, 4), (4, 1), (4, 3)\}$.

2. Considere que p representa a proposição

$$\exists y\ \forall x\ \ \big(x \neq y \Rightarrow \big(xy > 0\ \vee\ x^2 + y = 0\big)\big)\,.$$

[2.0] (a) Em cada um dos seguintes casos, justificando, dê um exemplo de um domínio não vazio $D \subseteq \mathbb{R}$ (com $x, y \in D$ e a interpretação habitual de todos os símbolos) onde:

   i. a proposição p seja verdadeira;

   ii. a proposição p seja falsa.

[1.0] (b) Sem recorrer ao operador lógico *negação*, obtenha uma proposição equivalente a $\neg p$.

Resposta:

(a)i.

Para p ser verdadeira, tem de existir um elemento y em A tal que, para todos os valores de x em A distintos de y, $xy > 0$ ou $x^2 + y = 0$. Tome-se, por exemplo, $A = \{-2, -1, 1\}$ e $y = -1$. Com $x = -2$, a proposição $\big(xy > 0\ \vee\ x^2 + y = 0\big)$ é verdadeira, uma vez que $xy = 2 > 0$. Para $x = 1$, a proposição $\big(xy > 0\ \vee\ x^2 + y = 0\big)$ é, também, verdadeira, pois $xy = -1 < 0$, mas, $x^2 + y = 1^2 - 1 = 0$. Donde, para $A = \{-2, -1, 1\}$, p é verdadeira.

(a)ii.

Para p ser falsa, para todo o valor de y em A tem de existir, pelo menos, um valor de x em A, distinto de y, tal que a proposição $\big(xy > 0\ \vee\ x^2 + y = 0\big)$ é falsa, ou seja, tal que $xy \leq 0$ e $x^2 + y \neq 0$. Tome-se, por exemplo, $A = \{-1, 0\}$ e $y = -1$. Com $x = 0$, a proposição $\left(xy > 0 \ \vee \ x^2 + y = 0\right)$ é falsa, uma vez que xy não é maior que zero ($xy = 0$) e $x^2 + y = -1 \neq 0$. Considere-se, agora, $y = 0$. Para $x = -1$, a proposição $\left(xy > 0 \ \vee \ x^2 + y = 0\right)$ é, também, falsa, pois $xy = 0$ e $x^2 + y = 1 \neq 0$. Logo, p é falsa para $A = \{-1, 0\}$.

(b)

Recorde-se que $\neg(\phi \Rightarrow \psi) \Leftrightarrow \neg(\neg\phi \vee \psi) \Leftrightarrow (\phi \wedge \neg\psi)$ e que $\neg(\phi \vee \psi) \Leftrightarrow (\neg\phi \wedge \neg\psi)$.

Sendo assim,

$$\begin{aligned}
& \neg\left(\exists y\ \forall x\ \left(x \neq y \Rightarrow \left(xy > 0 \ \vee \ x^2 + y = 0\right)\right)\right) \\
\Leftrightarrow \quad & \left(\forall y\ \exists x\ \neg\ \left(x \neq y \Rightarrow \left(xy > 0 \ \vee \ x^2 + y = 0\right)\right)\right) \\
\Leftrightarrow \quad & \left(\forall y\ \exists x\ \left(x \neq y \wedge \left(xy \leq 0 \ \wedge \ x^2 + y \neq 0\right)\right)\right)
\end{aligned}$$

é logicamente equivalente a $\neg p$.

(2.0) 3. Considere uma linguagem de primeira ordem com os símbolos de relação C, R, H, G e x, y símbolos de variáveis, na qual são válidas as seguintes fórmulas:

F1: $\forall x\ (\forall y\ (C(x,y) \Rightarrow R(y))) \Rightarrow H(x)$

F2: $\forall x\ (G(x) \Rightarrow R(x))$

F3: $\forall x\ (\exists y\ (C(y,x) \wedge G(y))) \Rightarrow G(x)$

T: $\forall x\ (G(x) \Rightarrow H(x))$

Usando o princípio da resolução mostre que **T** é consequência lógica de **F1**, **F2** e **F3**.

<u>Resposta:</u>

Para mostrar que **T** é consequência lógica de **F1**, **F2** e **F3**, vamos mostrar que

$$\neg\left((\mathbf{F1} \wedge \mathbf{F2} \wedge \mathbf{F3}) \Rightarrow \mathbf{T}\right) \equiv \mathbf{F1} \wedge \mathbf{F2} \wedge \mathbf{F3} \wedge \neg\mathbf{T}$$

é uma contradição, ou seja, que o conjunto de fórmulas

$$\{\mathbf{F1}, \mathbf{F2}, \mathbf{F3}, \neg\mathbf{T}\}$$

é inconsistente.

Ora,

$$\neg\mathbf{T} \equiv \exists x\ \neg(\neg G(x) \vee H(x)) \equiv \exists x\ (G(x) \wedge \neg H(x)).$$

Temos de transformar todas as fórmulas na forma normal de Skolem.

A fórmula **F1** é equivalente a

$$\begin{aligned}
\forall x\ (\neg(\forall y\ (\neg C(x,y) \vee R(y))) \vee H(x)) \equiv & \quad \forall x\ (\exists y\ (C(x,y) \wedge \neg R(y)) \vee H(x)) \\
\equiv & \quad \forall x\ ((\underbrace{C(x, f(x)) \vee H(x)}_{C_1}) \wedge (\underbrace{\neg R(f(x)) \vee H(x)}_{C_2})),
\end{aligned}$$

da qual resultam as cláusulas C_1 e C_2, com f um símbolo de uma função de Skolem (de um argumento).

De **F2** tem-se

$$\forall x\ (\underbrace{\neg G(x) \vee R(x)}_{C_3}),$$

tendo-se a cláusula C_3.

A partir de **F3** obtém-se

$$\forall x\ (\neg(\exists y\ (C(y,x) \wedge G(y))) \vee G(x)) \equiv \forall x\ \forall y\ (\underbrace{\neg C(y,x) \vee \neg G(y) \vee G(x)}_{C_4}),$$

resultando a cláusula C_4.

Finalmente, introduzindo uma constante c, a partir de $\neg\mathbf{T}$ tem-se

$$\exists x\ (G(x) \wedge \neg H(x))\ \equiv \underbrace{G(c)}_{C_5} \wedge \underbrace{\neg H(c)}_{C_6},$$

vindo as cláusulas C_5 e C_6.

Assim, renomeando os símbolos de variáveis, obtêm-se as cláusulas

$$\underbrace{C(x,f(x)) \vee H(x)}_{C_1},\quad \underbrace{\neg R(f(y)) \vee H(y)}_{C_2},\quad \underbrace{\neg G(z) \vee R(z)}_{C_3},\quad \underbrace{\neg C(u,v) \vee \neg G(u) \vee G(v)}_{C_4},\quad \underbrace{G(c)}_{C_5},\quad \underbrace{\neg H(c)}_{C_6}$$

Um unificador mais geral (u.m.g.) de $\{C(x,f(x)), C(u,v)\}$ é a substituição $\sigma_1 = \{x/u, f(x)/v\}$,

e a resolvente binária das cláusulas C_1 e $C_4\sigma_1$ é a cláusula C_7:

$$\begin{array}{rc} C_1: & C(x,f(x)) \vee H(x) \\ C_4\sigma_1: & \neg C(x,f(x)) \vee \neg G(x) \vee G(f(x)) \\ \hline C_7: & H(x) \vee \neg G(x) \vee G(f(x)) \end{array}$$

Um u.m.g. de $\{H(x), H(c)\}$ é a substituição $\sigma_2 = \{c/x\}$,

e a resolvente binária das cláusulas $C_7\sigma_2$ e C_6 é a cláusula C_8:

$$\begin{array}{rc} C_7\sigma_2: & H(c) \vee \neg G(c) \vee G(f(c)) \\ C_6: & \neg H(c) \\ \hline C_8: & \neg G(c) \vee G(f(c)) \end{array}$$

A resolvente binária das cláusulas C_8 e C_5 é a cláusula C_9:

$$\begin{array}{rc} C_8: & \neg G(c) \vee G(f(c)) \\ C_5: & G(c) \\ \hline C_9: & G(f(c)) \end{array}$$

Um u.m.g. de $\{G(f(c)), G(z)\}$ é a substituição $\sigma_3 = \{f(c)/z\}$, e a resolvente binária das cláusulas C_9 e $C_3\sigma_3$ é a cláusula C_{10}:

$$\begin{array}{rc} C_9: & G(f(c)) \\ C_3\sigma_3: & \neg G(f(c)) \vee R(f(c)) \\ \hline C_{10}: & R(f(c)) \end{array}$$

Um u.m.g. de $\{R(f(c)), R(f(y))\}$ é a substituição $\sigma_4 = \{c/y\}$,

e a resolvente binária das cláusulas C_{10} e $C_2\sigma_4$ é a cláusula C_{11}:

$$\begin{array}{rc} C_{10}: & R(f(c)) \\ C_2\sigma_4: & \neg R(f(c)) \vee H(c) \\ \hline C_{11}: & H(c) \end{array}$$

Finalmente, a resolvente binária de C_{11} e C_6 é a cláusula vazia $\Diamond$ (=falso):

$$\begin{array}{rc} C_{11}: & H(c) \\ C_6: & \neg H(c) \\ \hline & \Diamond \end{array}$$

Donde, provamos que o conjunto de cláusulas $S = \{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6\}$ é inconsistente, isto é, que

$$\mathbf{F1} \wedge \mathbf{F2} \wedge \mathbf{F3} \wedge \neg\mathbf{T}$$

é uma contradição.

Logo,

$$(\mathbf{F1} \wedge \mathbf{F2} \wedge \mathbf{F3}) \Rightarrow \mathbf{T}$$

é uma tautologia, ou seja, **T** é consequência lógica de **F1**, **F2** e **F3**.

(2.5) 4. Encontre uma fórmula fechada para a sucessão definida por recorrência:

$$a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} + 2 \cdot 3^n,\ a_0 = 1, a_1 = 0\ .$$

Resposta:

A equação de recorrência dada é linear não homogénea, com solução geral

$$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)},$$

onde $a_n^{(h)}$ corresponde à solução da parte homogénea, $a_n - 6a_{n-1} + 9a_{n-2} = 0$, e $a_n^{(p)}$ é a solução particular associada a

$$a_n - 6a_{n-1} + 9a_{n-2} = f(n), \quad \text{com} \quad f(n) = 2 \cdot 3^n\ . \tag{1}$$

Da parte homogénea resulta a equação característica

$$x^2 - 6x + 9 = 0\ \Leftrightarrow (x-3)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 3\ ,$$

pelo que, 3 é raiz característica de grau de multiplicidade $m = 2$.

Assim,

$$a_n^{(h)} = (C_0 + C_1 n)3^n,$$

onde C_0 e C_1 são constantes a determinar usando as condições iniciais.

Como 3 é raiz característica com multiplicidade $m = 2$, a solução particular associada a $f(n) = 2 \cdot 3^n$ é da forma

$$a_n^{(p)} = An^m 3^n = An^2 3^n\ .$$

Substituindo $a_n^{(p)}$ em (1), determina-se a constante A, vindo

$$An^2 3^n - 6A(n-1)^2 3^{n-1} + 9A(n-2)^2 3^{n-2} = 2 \cdot 3^n\ .$$

Dividindo a equação anterior por 3^n, tem-se

$$An^2 - 2A(n-1)^2 + A(n-2)^2 = 2 \Leftrightarrow A\left(n^2 - 2n^2 + 4n - 2 + n^2 - 4n + 4\right) = 2\ ,$$

obtendo-se $A = 1$.

Donde,

$$a_n = (C_0 + C_1 n)3^n + n^2 3^n,$$

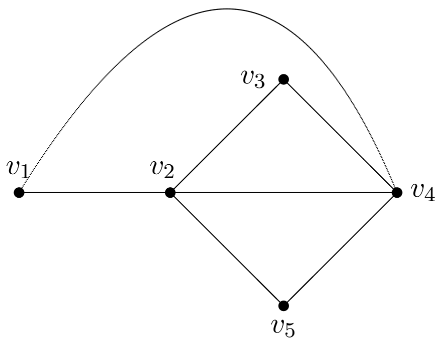
e, atendendo às condições iniciais, $a_0 = 1$ e $a_1 = 0$, podem calcular-se as constantes C_0 e C_1:

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_0 = 1 \\ (C_0 + C_1)\,3 + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_0 = 1 \\ C_1 = -2 \end{cases}.$$

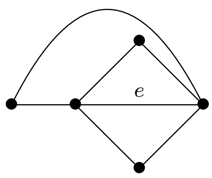
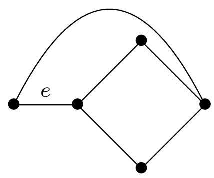
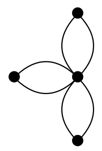
Logo,

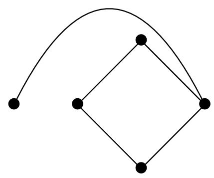
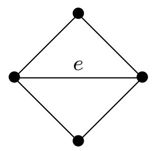
$$a_n = \left(n^2 - 2n + 1\right)3^n = (n-1)^2\,3^n, \quad n \geq 0\ .$$

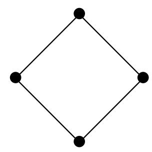
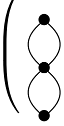
(2.0) 5. Seja G o grafo simples representado na figura seguinte, e uma dada aresta de G e $\tau(G)$ o número de árvores abrangentes de G. Usando a fórmula $\tau(G) = \tau(G-e) + \tau(G//e)$ determine o número de árvores abrangentes de G. Justifique devidamente.



Resposta:

τ () $=$ τ () $+\ \tau$ ()

$=$ τ () $+\ \tau$ () $+\ 2 \times 2 \times 2$

$=$ $2 \times \tau$ () $+\ \tau$ () $+8$

$$= \quad 2 \times 4 + 2 \times 2 + 8 \quad = \quad 20$$

(1.5) 6. Usando o princípio de indução matemática mostre que todo o grafo conexo com n vértices tem pelo menos $n-1$ arestas ($n \in \mathbb{N}$).

Resposta:

Seja a proposição $P(n)$: Todo o grafo conexo com n vértices tem pelo menos $(n-1)$ arestas.

$P(1)$: para $n = 1$ a proposição é verdadeira, uma vez que todo o grafo conexo com um vértice tem zero arestas, $(n-1) = 0$.

$P(k)$: por hipótese de indução (HI), vamos assumir que todo o grafo conexo com k vértices tem pelo menos $k-1$ arestas.

$P(k+1)$: Tese (T), um grafo conexo com $(k+1)$ vértices tem pelo menos k arestas.

Admitindo que a proposição é verdadeira para $n = k$ prova-se que também é verdadeira para $n = (k+1)$:

suponhamos que o grafo $G = (V, E)$ tem $(k+1)$ vértices e é conexo, ou seja, sendo v um vértice qualquer de G este tem grau $d(v) > 0$, pois, o grafo é conexo e tem mais que um vértice, donde

$$|E(G)| > |E(G-v)| \quad \text{e} \quad |V(G-v)| = k,$$

Por HI, tem-se

$$|E(G-v)| \geq k-1,$$

donde,

$$|E(G)| > |E(G-v)| \geq k-1,$$

e, por conseguinte,

$$|E(G)| > k-1.$$

Logo,

$$|E(G)| \geq k,$$

pelo que, o grafo G tem pelo menos k arestas, tal como se pretendia provar.

Conclui-se que a proposição $P(n)$ é verdadeira para todo o $n \in \mathbb{N}$.