Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

CÁLCULO II - Agrupamento 4 5 de julho de 2021

2.º Teste de Avaliação Discreta Duração: 2h

O formulário encontra-se no verso. Justifique todas as respostas de forma clara e concisa.

1. **[25]** Determine e classifique os pontos críticos da função $g(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

2. **[25]** Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x^2 - y^2 + x^3$.
Justifique que f possui extremos absolutos na circunferência de equação $x^2 + y^2 = 1$ e determine tais extremos.

3. **[35]** Resolva as seguintes equações diferenciais:

   (a) $y' = x\, e^{x^2 - y}$;

   (b) $2ye^{2x} + (e^{2x} - y)\dfrac{dy}{dx} = 0$.

4. **[30]** Determine um integral geral na forma explícita para a equação diferencial

$$2xyy' = x^2 + 3y^2, \quad x > 0,\ y < 0.$$

(**Sugestão:** Considere a mudança de variável $y = zx$)

5. **[70]** Considere o seguinte problema de valores iniciais (PVI):

$$y'' + 5y' + 4y = e^{-t}, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

   (a) Determine a solução do PVI começando por resolver a equação diferencial pelo método dos coeficientes indeterminados.

   (b) Resolva o mesmo PVI usando agora transformadas de Laplace.

6. **[15]** Considere uma equação diferencial da forma

$$y' = p(x) + q(x)y + r(x)y^2, \tag{1}$$

onde $p(x), q(x), r(x)$ são funções definidas num dado intervalo $I \subset \mathbb{R}$.
Seja $y_1(x)$ uma solução da equação (1) em I. Mostre que a mudança de variável

$$y = y_1 + \frac{1}{z} \quad (z \neq 0)$$

converte a equação dada numa equação diferencial linear (em x e z).

FORMULÁRIO

Algumas fórmulas de derivação

$(f\,g)' = f'g + f\,g'$	$(\frac{f}{g})' = \frac{f'g - f\,g'}{g^2}$
$(k\,f)' = k\,f' \qquad (k \in \mathbb{R})$	$(f^\alpha)' = \alpha\,f^{\alpha-1}f' \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$
$(a^f)' = f'\,a^f\,\ln a \qquad (a \in \mathbb{R}^+)$	$(\log_a f)' = \frac{f'}{f\,\ln a} \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$
$(\operatorname{sen} f)' = f'\,\cos f$	$(\cos f)' = -f'\operatorname{sen} f$
$(\operatorname{tg} f)' = f'\,\sec^2 f = \frac{f'}{\cos^2 f}$	$(\operatorname{cotg} f)' = -f'\operatorname{cosec}^2 f = -\frac{f'}{\operatorname{sen}^2 f}$
$(\operatorname{arcsen} f)' = \frac{f'}{\sqrt{1-f^2}}$	$(\arccos f)' = -\frac{f'}{\sqrt{1-f^2}}$
$(\operatorname{arctg} f)' = \frac{f'}{1+f^2}$	$(\operatorname{arccotg} f)' = -\frac{f'}{1+f^2}$

Integração por partes: $\displaystyle\int f'g = f\,g - \int f\,g'$

Algumas transformadas de Laplace

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s), \quad s > s_f$$

função	transformada
$t^n \quad (n \in \mathbb{N}_0)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}\,,\ s > 0$
$e^{at} \quad (a \in \mathbb{R})$	$\frac{1}{s-a}\,,\ s > a$
$\operatorname{sen}(at) \quad (a \in \mathbb{R})$	$\frac{a}{s^2+a^2}\,,\ s > 0$
$\cos(at) \quad (a \in \mathbb{R})$	$\frac{s}{s^2+a^2}\,,\ s > 0$
$\operatorname{senh}(at) \quad (a \in \mathbb{R})$	$\frac{a}{s^2-a^2}\,,\ s > \lvert a\rvert$
$\cosh(at) \quad (a \in \mathbb{R})$	$\frac{s}{s^2-a^2}\,,\ s > \lvert a\rvert$

função	transformada
$e^{\lambda t}f(t) \quad (\lambda \in \mathbb{R})$	$F(s-\lambda)$
$H_a(t)f(t-a) \quad (a > 0)$	$e^{-as}F(s)$
$f(at) \quad (a > 0)$	$\frac{1}{a}\,F\left(\frac{s}{a}\right)$
$t^n f(t) \quad (n \in \mathbb{N})$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$
$f'(t) \quad (n \in \mathbb{N})$	$sF(s) - f(0)$
$f''(t) \quad (n \in \mathbb{N})$	$s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$
$f^{(n)}(t) \quad (n \in \mathbb{N})$	$s^nF(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k}f^{(k-1)}(0)$