CÁLCULO II - Agrupamento 4 11 de julho de 2022

Exame da Época de Recurso Duração: 2h30

A prova é composta por 7 questões. O formulário encontra-se no verso.
Justifique todas as respostas de forma clara e concisa.

1. **[35]** Considere a série de potências $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(n+1)}{4^n}(x-1)^n$.
   (a) Determine o domínio de convergência da série dada, indicando os pontos onde a convergência é simples e absoluta.
   (b) Justifique que f é integrável no intervalo $[1,3]$ e calcule o integral $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,dx$.

2. **[20]** Usando o resto na forma de Lagrange, determine um majorante para o erro absoluto cometido ao aproximar $f(x) = \cos(4x)$ pelo polinómio de MacLaurin de ordem 2 no intervalo $[-0.01, 0.01]$.

3. **[30]** Considere a função f definida em $[0,\pi]$ por $f(x) = x$.
   (a) Determine a série de Fourier de co-senos de f.
   (b) Represente graficamente a soma da série obtida na alínea anterior no intervalo $[-2\pi, 2\pi]$.

4. **[35]** Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - x$.
   (a) Determine e classifique os pontos críticos de f.
   (b) Determine os extremos absolutos de f no conjunto $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 1\}$.

5. **[45]** Resolva as seguintes equações diferenciais:
   (a) $y' + x^2 y - x^2 = 0$;
   (b) $x\, e^{\frac{y}{x}} y' = x + y\, e^{\frac{y}{x}}, \quad x > 0$; (Sugestão: Considere a mudança de variável $z = y/x$)
   (c) $y'' + 4y' + 4y = \operatorname{sen} x$.

6. **[20]** Usando transformadas de Laplace, resolva o seguinte problema de Cauchy:
$$-y' + 2y = t\,e^t, \quad y(0) = -1.$$

7. **[15]** Considere a equação diferencial
$$h'(y)\,y' + p(x)\,h(y) = q(x), \tag{1}$$
onde p, q são funções contínuas em $\mathbb{R}$ e h é uma função invertível. Mostre que a substituição $z = h(y)$ converte a equação (1) numa equação diferencial linear cuja solução é
$$y(x) = h^{-1}\Big(\frac{1}{\mu(x)} \int q(x)\,\mu(x)\,dx\Big),$$
onde $\mu(x)$ denota um fator integrante para a referida equação linear.

FORMULÁRIO

Algumas fórmulas de derivação

$(f\,g)' = f'g + f\,g'$	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - f\,g'}{g^2}$
$(k\,f)' = k\,f' \qquad (k \in \mathbb{R})$	$(f^\alpha)' = \alpha\,f^{\alpha-1}f' \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$
$(a^f)' = f'\,a^f\,\ln a \qquad (a \in \mathbb{R}^+)$	$(\log_a f)' = \frac{f'}{f\,\ln a} \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$
$(\operatorname{sen} f)' = f'\cos f$	$(\cos f)' = -f'\operatorname{sen} f$
$(\operatorname{tg} f)' = f'\sec^2 f = \frac{f'}{\cos^2 f}$	$(\operatorname{cotg} f)' = -f'\operatorname{cosec}^2 f = -\frac{f'}{\operatorname{sen}^2 f}$
$(\operatorname{arcsen} f)' = \frac{f'}{\sqrt{1-f^2}}$	$(\arccos f)' = -\frac{f'}{\sqrt{1-f^2}}$
$(\operatorname{arctg} f)' = \frac{f'}{1+f^2}$	$(\operatorname{arccotg} f)' = -\frac{f'}{1+f^2}$

Integração por partes: $\displaystyle\int f'g = f\,g - \int f\,g'$

Alguns desenvolvimentos em série de MacLaurin

- $\displaystyle\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots, \quad x \in]-1,1[$
- $\displaystyle e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, \quad x \in \mathbb{R}$
- $\displaystyle\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots, \quad x \in \mathbb{R}$
- $\displaystyle\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots, \quad x \in \mathbb{R}.$

Algumas transformadas de Laplace

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s), \quad s > s_f$$

função	transformada
$t^n \quad (n \in \mathbb{N}_0)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}, \ s > 0$
$e^{at} \quad (a \in \mathbb{R})$	$\frac{1}{s-a}, \ s > a$
$\operatorname{sen}(at) \quad (a \in \mathbb{R})$	$\frac{a}{s^2+a^2}, \ s > 0$
$\cos(at) \quad (a \in \mathbb{R})$	$\frac{s}{s^2+a^2}, \ s > 0$
$\operatorname{senh}(at) \quad (a \in \mathbb{R})$	$\frac{a}{s^2-a^2}, \ s > \lvert a\rvert$
$\cosh(at) \quad (a \in \mathbb{R})$	$\frac{s}{s^2-a^2}, \ s > \lvert a\rvert$

função	transformada
$e^{\lambda t}f(t) \quad (\lambda \in \mathbb{R})$	$F(s-\lambda)$
$H_a(t)f(t-a) \quad (a > 0)$	$e^{-as}F(s)$
$f(at) \quad (a > 0)$	$\frac{1}{a}\,F\left(\frac{s}{a}\right)$
$t^n f(t) \quad (n \in \mathbb{N})$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$
$f'(t) \quad (n \in \mathbb{N})$	$sF(s) - f(0)$
$f''(t) \quad (n \in \mathbb{N})$	$s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$
$f^{(n)}(t) \quad (n \in \mathbb{N})$	$s^nF(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k}f^{(k-1)}(0)$