Álgebra Linear e Geometria Analítica

Espaços Vetoriais

Departamento de Matemática Universidade de Aveiro

Introdução

Ao longo deste capítulo considera-se

- um conjunto não vazio $\mathcal{V}$,
- uma operação $\oplus$ definida para cada $X \in \mathcal{V}$ e para cada $Y \in \mathcal{V}$,

$$X \oplus Y,$$

- uma operação $\odot$ definida para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ e para cada $X \in \mathcal{V}$,

$$\alpha \odot X.$$

Diz-se que o conjunto $\mathcal{V}$ está munido com as operações $\oplus$ e $\odot$.

As operações $\oplus$ e $\odot$ são usualmente designadas por

adição e multiplicação por escalar,

(respectivamente) porque, como se verá a seguir, estas operações têm muitas propriedades em comum com outras operações de adição e multiplicação por escalar conhecidas, tais como a adição e a multiplicação por escalar de vetores e de matrizes.

Definição de espaço vetorial

O conjunto $\mathcal{V}$, munido das operações $\oplus$ e $\odot$, é um espaço vetorial real se, $\forall X, Y, Z \in \mathcal{V}$ e $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

1. $\mathcal{V}$ é fechado relativamente a $\oplus$ — $X \oplus Y \in \mathcal{V}$
2. $\oplus$ é comutativa — $X \oplus Y = Y \oplus X$
3. $\oplus$ é associativa — $(X \oplus Y) \oplus Z = X \oplus (Y \oplus Z)$
4. existe (único) o el. neutro $0_{\mathcal{V}} \in \mathcal{V}$ (zero de $\mathcal{V}$) para $\oplus$ — $0_{\mathcal{V}} \oplus X = X$
5. existe (único) o simétrico $\ominus X \in \mathcal{V}$ de X em relação a $\oplus$ — $\ominus X \oplus X = 0_{\mathcal{V}}$
6. $\mathcal{V}$ é fechado relativamente a $\odot$ — $\alpha \odot X \in \mathcal{V}$
7. $\odot$ é distributiva em relação a $\oplus$ — $\alpha \odot (X \oplus Y) = \alpha \odot X \oplus \alpha \odot Y$
8. $\odot$ é "distributiva" em relação a $+$ — $(\alpha + \beta) \odot X = \alpha \odot X \oplus \beta \odot X$
9. os produtos (o de $\mathbb{R}$ e $\odot$) são "associativos" — $(\alpha\beta) \odot X = \alpha \odot (\beta \odot X)$
10. o escalar 1 é o "elemento neutro" para $\odot$ — $1 \odot X = X$

Daqui em diante, designaremos os espaços vetoriais reais apenas por espaços vetoriais (e.v.)

Exemplos de espaços vetoriais

1. $\mathbb{R}^n$ munido das operações adição e multiplicação por escalar usuais.

2. $\mathbb{R}^+$ munido das operações:
$$x \oplus y = xy \qquad \text{e} \qquad \alpha \odot x = x^{\alpha}, \qquad\qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^+,\ \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

3. O conjunto $\mathbb{R}^{m\times n}$ das matrizes $m \times n$ munido das operações adição de matrizes e multiplicação de uma matriz por um escalar real.

4. O conjunto de todas as funções reais de variável real, com o mesmo domínio, munido da adição de funções e multiplicação de uma função por um escalar real.

5. O conjuntos $\mathcal{P}$ de todos os polinómios (de qualquer grau) e o conjunto $\mathcal{P}_n$ dos polinómios de grau menor ou igual a n (incluindo o polinómio nulo), com as operações usuais.

O conjunto dos polinómios de grau n, com as operações usuais, <u>não é e.v.</u>

Mais algumas propriedades

Proposição: Seja $\mathcal{V}$ um e.v. Então

(a) $0 \odot X = 0_{\mathcal{V}}$, $\forall\, X \in \mathcal{V}$;

(b) $\alpha \odot 0_{\mathcal{V}} = 0_{\mathcal{V}}$, $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$;

(c) $\alpha \odot X = 0_{\mathcal{V}} \;\Rightarrow\; \alpha = 0$ ou $X = 0_{\mathcal{V}}$;

(d) $(-1) \odot X = \ominus X$ é o simétrico de X em relação a $\oplus$, $\forall\, X \in \mathcal{V}$.

Para simplificar as notações, daqui em diante, escreve-se

i. $X + Y$ em vez de $X \oplus Y$, para $X, Y \in \mathcal{V}$;

ii. αX em vez de $\alpha \odot X$, para $\alpha \in \mathbb{R}$ e $X \in \mathcal{V}$;

iii. $-X$ em vez de $\ominus X$, para $X \in \mathcal{V}$.

Definição de subespaço

O subconjunto não vazio $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{V}$ é um subespaço (vetorial) do e.v. $\mathcal{V}$ se, munido das mesmas operações de $\mathcal{V}$, for ele próprio um e.v.

Teorema: $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{V}$ é um subespaço do e.v. $\mathcal{V}$ se e só se

1. $0_{\mathcal{V}} \in \mathcal{S}$, onde $0_{\mathcal{V}}$ representa o elemento neutro de $\mathcal{V}$ em relação à adição;
2. $\mathcal{S}$ é fechado em relação à adição em $\mathcal{V}$:
$$X + Y \in \mathcal{S}, \quad \text{para } X, Y \in \mathcal{S};$$
3. $\mathcal{S}$ é fechado em relação à multiplicação por escalar em $\mathcal{V}$:
$$\alpha X \in \mathcal{S}, \quad \text{para } \alpha \in \mathbb{R}, X \in \mathcal{S}.$$

Exemplos de subespaços

Exemplo:

1. $\mathcal{V}$ e $\{0_{\mathcal{V}}\}$ são os subespaços triviais de $\mathcal{V}$;

2. $\{(0, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\}$ é um subespaço de $\mathbb{R}^3$;

3. $\{(1, y) : y \in \mathbb{R}\}$ não é um subespaço de $\mathbb{R}^2$;

Subespaço gerado por um conjunto

Dados os elementos $X_1, \dots, X_k$ de $\mathcal{V}$ e os escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$, o elemento $X \in \mathcal{V}$ tal que

$$X = \alpha_1 X_1 + \cdots + \alpha_k X_k$$

é uma combinação linear dos elementos $X_1, \dots, X_k$.

Teorema:
Seja $\mathcal{V}$ um e.v., $K = \{X_1, \dots, X_k\} \subset \mathcal{V}$ e S o conjunto das combinações lineares de elementos de K, ou seja, $S = \{\alpha_1 X_1 + \cdots + \alpha_k X_k : \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}\}$. O conjunto S é um subespaço de $\mathcal{V}$.

O subespaço S designa-se por subespaço gerado por K, e escreve-se

$$S = \langle K \rangle \text{ ou } S = \langle X_1, \dots, X_k \rangle.$$

Diz-se, também, que K gera o subespaço $\mathcal{S}$ ou é um conjunto gerador do subespaço $\mathcal{S}$.

Subespaço gerado por um conjunto

Exercício: Confirme que se $X_1, \cdots, X_k \in \mathcal{V}$, então $S = \langle X_1, \ldots, X_k \rangle$ é um subespaço de $\mathcal{V}$.

Exemplo: Dados os vetores não colineares $X_1, X_2 \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$,

1. $\langle X_1 \rangle$ é a reta que passa pela origem e tem vetor director X_1;
2. $\langle X_1, X_2 \rangle$ é o plano que passa pela origem e tem vetores diretores X_1 e X_2.

Propriedades dos conjuntos geradores

Lema: Dados $X_1, \ldots, X_k \in \mathcal{V}$ e $i, j \in \{1, \ldots, k\}$, com $i \neq j$,

i. $\langle X_1, \ldots, X_i, \ldots, X_j, \ldots, X_k \rangle = \langle X_1, \ldots, X_j, \ldots, X_i, \ldots, X_k \rangle$;

ii. $\langle X_1, \ldots, X_i, \ldots, X_k \rangle = \langle X_1, \ldots, \alpha X_i, \ldots, X_k \rangle$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

iii. $\langle X_1, \ldots, X_i, \ldots, X_k \rangle = \langle X_1, \ldots, X_i + \beta X_j, \ldots, X_k \rangle$, $\beta \in \mathbb{R}$.

Espaço nulo de uma matriz

O espaço nulo da matriz A, $\mathcal{N}(A)$, é o conjunto de todas as soluções do sistema homogéneo associado a A $m \times n$,

$$\mathcal{N}(A) = \{X \in \mathbb{R}^n : \ AX = 0\}.$$

O espaço nulo de A, $\mathcal{N}(A)$, pode escrever-se como o conjunto de todas as combinações lineares de $n - car(A)$ vetores de $\mathbb{R}^n$, facilmente obtidos usando colunas de uma matriz escalonada reduzida A_r equivalente (por linhas) a A.

Espaço nulo de uma matriz

Exemplo

Considerando a matriz A e a matriz escalonada reduzida A_r:

$$A=\begin{bmatrix}1 & -2 & -4 & 3\\ 2 & -4 & -7 & 5\\ 1 & -2 & -3 & 2\end{bmatrix}\sim A_r=\begin{bmatrix}1 & -2 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

$$X\in\mathcal{N}(A) \iff AX=0 \iff A_rX=0 \iff$$

$$\begin{cases}x_1 = 2x_2+x_4\\ x_3 = x_4\end{cases} \iff X=\begin{bmatrix}2x_2+x_4\\ x_2\\ x_4\\ x_4\end{bmatrix}=x_2\begin{bmatrix}2\\1\\0\\0\end{bmatrix}+x_4\begin{bmatrix}1\\0\\1\\1\end{bmatrix}=x_2N_2+x_4N_4,\quad x_2,x_4\in\mathbb{R}\text{ var. livres.}$$

O conjunto $\{N_2,\ N_4\}$ é um conjunto gerador de $\mathcal{N}(A)$.

Exercício:

Mostre que se o sistema $AX=B$ é possível e se $\overline{X}$ é uma sua solução, então o conjunto de soluções do sistema é $\{\overline{X}+Y : Y\in\mathcal{N}(A)\}$.

Espaço das linhas e espaço das colunas

Seja A uma matriz $m \times n$ com linhas $L_1, \ldots, L_m \in \mathbb{R}^n$ e colunas $C_1, \ldots, C_n \in \mathbb{R}^m$

$$A = \begin{bmatrix} {L_1}^T \\ \vdots \\ {L_m}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & \cdots & C_n \end{bmatrix}$$

- O espaço das linhas de A é o subespaço de $\mathbb{R}^n$

$$\mathcal{L}(A) = \langle L_1, \ldots, L_m \rangle \subseteq \mathbb{R}^n.$$

- O espaço das colunas de A é o subespaço de $\mathbb{R}^m$

$$\mathcal{C}(A) = \langle C_1, \ldots, C_n \rangle \subseteq \mathbb{R}^m.$$

Espaço das linhas e espaço das colunas

Como consequência das propriedades dos conjuntos geradores (slide 11) conclui-se o seguinte:

Teorema: Se as matrizes A e B são equivalentes por linhas,

$$\mathcal{L}(A)=\mathcal{L}(B).$$

Independência linear

Um subconjunto não vazio $\mathcal{K}=\{X_1,\ldots,X_k\}$ de um e.v. $\mathcal{V}$ diz-se linearmente independente (l.i.) se

$$\alpha_1 X_1+\cdots+\alpha_k X_k \;=\; 0_{\mathcal{V}} \qquad \Rightarrow \quad \alpha_1=\cdots=\alpha_k=0,$$

caso contrário, $\mathcal{K}$ é linearmente dependente (l.d.) em $\mathcal{V}$.

Nota: $0_{\mathcal{V}}\in\mathcal{K} \;\Rightarrow\; \mathcal{K}$ é linearmente dependente.

Observação:

- Dois vetores não nulos de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ são colineares se e só se são linearmente dependentes.
- Três vetores não colineares de $\mathbb{R}^3$ definem um plano se e só se são linearmente dependentes.

Independência linear

Seja $\mathcal{K}=\{X_1,\ldots,X_k\}$ um subconjunto de um e.v. $\mathcal{V}$.

$\mathcal{K}$ é linearmente dependente se e só se o sistema que se obtém da equação

$$\alpha_1 X_1 + \cdots + \alpha_k X_k = 0_{\mathcal{V}}$$

é possível e indeterminado, isto é, se tem uma solução com os escalares $\alpha_1,\ldots,\alpha_k \in \mathbb{R}$ não todos nulos.

Se existe $1 \leq j \leq k$ tal que $\alpha_j \neq 0$, então

$$X_j = \frac{\alpha_1}{\alpha_j}X_1 + \cdots + \frac{\alpha_{j-1}}{\alpha_j}X_{j-1} + \frac{\alpha_{j+1}}{\alpha_j}X_{j+1} + \cdots \frac{\alpha_k}{\alpha_j}X_k$$

concluindo-se que X_j pertence ao subespaço gerado por $\mathcal{K} \setminus \{X_j\}$.

Geradores e independência linear

Sejam $\mathcal{V}$ um e.v. e $\mathcal{K} = \{X_1, \ldots, X_k\} \subset \mathcal{V}$.

Lema: Seja $X \in \mathcal{K}$. Então X é combinação linear dos elementos de $\mathcal{K} \setminus \{X\}$ se e só se

$$\langle \mathcal{K} \setminus \{X\} \rangle = \langle K \rangle.$$

Teorema: $\mathcal{K}$ é um conjunto linearmente

- dependente $\iff$ existe $X \in \mathcal{K}$ tal que $X \in \langle \mathcal{K} \setminus \{X\} \rangle$, ou seja, $\langle \mathcal{K} \setminus \{X\} \rangle = \langle \mathcal{K} \rangle$;
- independente $\iff$ para cada $X \in \mathcal{V} \setminus \langle \mathcal{K} \rangle$, o conjunto $\mathcal{K} \cup \{X\}$ é l.i.

Geradores e independência linear

Corolário:

Seja $\mathcal{V}$ um e.v. e $\mathcal{K} = \{X_1, \ldots, X_k\} \subset \mathcal{V}$.

- Se $\mathcal{K}$ gera $\mathcal{V}$ mas não é l.i., é possível retirar um elemento de $\mathcal{K}$, obtendo-se ainda um conjunto gerador de $\mathcal{V}$.
- Se $\mathcal{K}$ é l.i. mas não gera $\mathcal{V}$, é possível acrescentar um elemento de $\mathcal{V}$ a $\mathcal{K}$, obtendo-se ainda um conjunto l.i.

Corolário:

Se $\mathcal{V}$ é um e.v. finitamente gerado (e.v. gerado por um número finito de elementos), então $\mathcal{V}$ tem um conjunto gerador que é linearmente independente.

Base de um espaço vetorial

Uma base de um e.v. $\mathcal{V} \neq \{0_{\mathcal{V}}\}$ é um

- conjunto linearmente independente,
- conjunto gerador de $\mathcal{V}$.

Nota:

- Por convenção, o e.v. trivial $\{0_{\mathcal{V}}\}$ tem como base o conjunto vazio.
- Um conjunto l.i. é base do subespaço por ele gerado.

Base de um espaço vetorial

Exemplos:

1. Sejam $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, \ldots, 0, 1)$. Então $\mathcal{C}_n = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ é a base canónica de $\mathbb{R}^n$.
2. Seja E_{ij} a matriz $m \times n$ que tem a entrada (i, j) igual a 1 e todas as outras iguais a 0. Então $\mathcal{C}_{m\times n} = \{E_{ij} : i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n\}$ é a base canónica de $\mathbb{R}^{m\times n}$.
3. A base canónica do e.v. $\mathcal{P}_n$ dos polinómios na variável x de grau menor ou igual a n (incluindo o polinómio nulo) é $\mathcal{P}_n = \{1, x, \ldots, x^n\}$.
4. O e.v. $\mathcal{P}$ de todos os polinómios não admite uma base com um número finito de elementos. O conjunto $\{1, x, x^2, \cdots\}$ é uma base de $\mathcal{P}$.

Base de um espaço vetorial

Sejam $\mathcal{V}$ um e.v. e $\mathcal{K} = \{X_1, \ldots, X_k\} \subset \mathcal{V}$.

Proposição:

- Se $\mathcal{K}$ gera $\mathcal{V}$, então qualquer elemento de $\mathcal{V}$ pode escrever-se como combinação linear dos elementos de $\mathcal{K}$, de pelo menos uma maneira.
- Se $\mathcal{K}$ é l.i., então qualquer elemento de $\mathcal{V}$ pode escrever-se como combinação linear dos elementos de $\mathcal{K}$, de no máximo uma maneira.

Proposição: Se $\mathcal{K}$ é uma base de $\mathcal{V}$, então

cada elemento de $\mathcal{V}$ escreve-se de forma única como combinação linear dos elementos de $\mathcal{K}$.

Dimensão de um espaço vetorial

Teorema: Seja $\mathcal{V}$ um e.v. com uma base que contém n elementos e $\mathcal{K} \subset \mathcal{V}$ um subconjunto com r elementos.

i. $\mathcal{K}$ é l.i. $\Rightarrow$ $r \leq n$.
Neste caso, existe uma base de $\mathcal{V}$ que contém $\mathcal{K}$.

ii. $\mathcal{K}$ gera $\mathcal{V} \Rightarrow r \geq n$
Neste caso, existe uma base de $\mathcal{V}$ que é um subconjunto de $\mathcal{K}$.

Corolário:

Todas as bases de $\mathcal{V}$ possuem o mesmo número de elementos.

A dimensão de um e.v. $\mathcal{V}$ é o número de elementos de uma base de $\mathcal{V}$ e denota-se por $\dim \mathcal{V}$.

Dimensão de um espaço vetorial

Consequência do teorema anterior:

Seja $\mathcal{V}$ um espaço vetorial com dimensão n e $\mathcal{K}$ um subconjunto de $\mathcal{V}$ com r elementos.

i. $r > n \Rightarrow \mathcal{K}$ é l.d.

ii. $r < n \Rightarrow \mathcal{K}$ não gera $\mathcal{V}$.

iii. $r = n \Rightarrow \mathcal{K}$ é uma base de $\mathcal{V}$ se e só se $\mathcal{K}$ é l.i.,
se e só se $\mathcal{K}$ gera $\mathcal{V}$.

Se $\mathcal{B}$ é um e.v. com dimensão n e $\mathcal{K}$ é um subconjunto de $\mathcal{V}$ com n elementos, para verificar se $\mathcal{B}$ é uma base de $\mathcal{V}$ é suficiente verificar uma das condições:

i. $\mathcal{B}$ é linearmente independente,

ii. $\mathcal{B}$ gera $\mathcal{V}$.

Exemplos

Exemplos:

1. $\dim\{0_{\mathcal{V}}\} = 0$,
2. $\dim \mathbb{R}^n = n$,
3. $\dim \mathbb{R}^{m\times n} = mn$,
4. $\dim \mathcal{P}_n = n+1$.

Teorema:

Se $\mathcal{K} = \{X_1, \ldots, X_n\} \subset \mathcal{V}$ e $\dim \mathcal{V} = n$, então

i. $\mathcal{K}$ l.i. $\Rightarrow$ $\mathcal{K}$ é base de $\mathcal{V}$;

ii. $\mathcal{K}$ gera $\mathcal{V}$ $\Rightarrow$ $\mathcal{K}$ é base de $\mathcal{V}$.

Bases e dimensão de $\mathcal{L}(A)$

Teorema: Seja A uma matriz $m \times n$ e A_e uma matriz escalonada equivalente (por linhas) a A. Então

1. as linhas não nulas de A_e formam uma base de $\mathcal{L}(A)$;
2. $\dim \mathcal{L}(A) = car(A)$.

Exemplo: Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 & 3 \\ 2 & -4 & -7 & 5 \\ 1 & -2 & -3 & 2 \end{bmatrix} \sim A_e = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim A_r = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

sendo A_e e A_r formas escalonada e reduzida de A, respectivamente.

De A_e e A_r obtêm-se, respectivamente, as seguintes bases de $\mathcal{L}(A)$:

$$\mathcal{B} = \{(1, -2, -4, 3), (0, 0, 1, -1)\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{(1, -2, 0, 1), (0, 0, 1, -1)\}.$$

Observe-se que

$$\dim \mathcal{L}(A) = 2 = car(A).$$

Bases e dimensão de $\mathcal{N}(A)$

Teorema:

Seja A uma matriz $m \times n$. Então

$$\dim \mathcal{N}(A) = \text{nul}(A) = \text{ n}^o \text{ de inc. livres do sistema } AX = 0.$$

Exemplo

Considerando a matriz A do exemplo anterior, vimos que (slide 13)

$$X \in \mathcal{N}(A) \iff X = x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = x_2 N_2 + x_4 N_4, \quad x_2, x_4 \in \mathbb{R} \text{ var. livres.}$$

Logo,

$$\mathcal{N}(A) = < N_2, N_4 > .$$

Como N_2 e N_4 são l.i., o conjunto gerador $\{N_2, \ N_4\}$ é uma base de $\mathcal{N}(A)$ e

$$\dim \mathcal{N}(A) = 2 = nul(A).$$

Bases e dimensão de $\mathcal{C}(A)$

Observe-se que

$$B \in \mathcal{C}(A) \iff \text{o sistema } AX = B \text{ é possível.}$$

Teorema:

Seja A uma matriz $m \times n$ e A_e uma matriz escalonada equivalente (por linhas) a A. Então

- uma base de $\mathcal{C}(A)$ é formada pelas colunas de A que correspondem às colunas dos pivôs de A_e;
- $\dim \mathcal{C}(A) = \dim \mathcal{L}(A)$.

Exemplo:

Para a matriz A do exemplo anterior (slide 26),

- uma base de $\mathcal{C}(A)$ é $\{(1, 2, 1), (-4, -7, -3)\}$,
- $\dim \mathcal{C}(A) = 2 = car(A)$.

Número de linhas (colunas) linearmente independentes

Corolário:

- A caraterística de uma matriz é o número máximo de linhas (colunas) l.i.

- Uma matriz quadrada é invertível se e só se o conjunto das suas linhas (colunas) é l.i.

Exemplo – Espaços $\mathcal{L}(A)$ e $\mathcal{N}(A)$ em $\mathbb{R}^3$

Sendo A uma matriz $m \times 3$, $\mathcal{L}(A)$ e $\mathcal{N}(A)$ são subespaços de $\mathbb{R}^3$.

Se $\text{car}(A) = 0$ (i.e. A é a matriz nula), então $\mathcal{L}(A) = \{(0,0,0)\}$ e $\mathcal{N}(A) = \mathbb{R}^3$.

Se $\text{car}(A) = 1$ e (a, b, c) é a linha não nula da forma escalonada de A,

- $\mathcal{L}(A)$ é a reta que contém $(0,0,0)$ e tem vetor diretor (a, b, c),
- $\mathcal{N}(A)$ é o plano ortogonal à reta anterior e que contém $(0,0,0)$.

Se $\text{car}(A) = 2$ e (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2) são as linhas não nulas da forma escalonada de A,

- $\mathcal{L}(A)$ é o plano que contém $(0,0,0)$ e tem vetores diretores (a_1, b_1, c_1) e (a_2, b_2, c_2),
- $\mathcal{N}(A)$ é a reta ortogonal ao plano anterior e que contém $(0,0,0)$.

Se $\text{car}(A) = 3$, então $\mathcal{L}(A) = \mathbb{R}^3$ e $\mathcal{N}(A) = \{(0,0,0)\}$.

Coordenadas de um elemento numa base ordenada

Seja $\mathcal{B} = (X_1, \ldots, X_n)$ uma base ordenada de um e.v. $\mathcal{V}$.

Teorema: Cada elemento $X \in \mathcal{V}$ escreve-se de forma única como combinação linear dos elementos de $\mathcal{B}$, ou seja, existem $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, tais que

$$X = a_1 X_1 + \cdots + a_n X_n.$$

Estes coeficientes $a_1, \ldots, a_n$ dizem-se as coordenadas de X na base $\mathcal{B}$.

O vetor das coordenadas de X na base $\mathcal{B}$ é $[X]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$.

Coordenadas - Propriedades

Propriedades:

Seja $\mathcal{V}$ um espaço vetorial com dimensão n e $\mathcal{S} = (X_1, \ldots, X_n)$ uma base ordenada de $\mathcal{V}$.

- Para $i = 1, \cdots, n$, o vetor X_i tem o seguinte vetor de coordenadas em $\mathcal{S}$:

$$[X_i]_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \\ \\ \\ \longleftarrow \ i\text{-ésima coordenada} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

- $[0_{\mathcal{V}}]_{\mathcal{S}} = 0_{\mathbb{R}^n}$;

- Para $Y_1, \ldots, Y_r \in \mathcal{V}$, e $a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{R}$,

$$[a_1 Y_1 + \cdots + a_r Y_r]_{\mathcal{S}} = a_1[Y_1]_{\mathcal{S}} + \cdots + a_r[Y_r]_{\mathcal{S}}.$$

Coordenadas - Exemplo

Exemplo:

Considere-se a base ordenada $\mathcal{B}_1 = ((1,1),(1,2))$ e os vetores $u = (0,1)$ e $v = (1,-1)$ de $\mathbb{R}^2$. Sabemos que existem escalares únicos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que

$$(0,1) = \alpha(1,1) + \beta(1,2).$$

Resolvendo o sistema que se obtém desta equação matricial (sistema possível e determinado) obtém-se $\alpha = -1$ e $\beta = 1$. Logo,

$$[u]_{\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

De forma análoga conclui-se que

$$[v]_{\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Coordenadas - Exemplo

Exemplo (cont.):

Considere-se, agora, a base ordenada $\mathcal{B}_2 = \big((3,2),(0,1)\big)$ e vamos determinar o vetor de coordenadas de $u = (0,1)$ na base $\mathcal{B}_2$:

$$(0,1) = \alpha(3,2) + \beta(0,1) \Leftrightarrow (\alpha = 0) \wedge (\beta = 1).$$

Assim,

$$[u]_{\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e, procedendo de forma análoga para $v = (1,-1)$, obtemos

$$[v]_{\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ -5/3 \end{bmatrix}.$$

Mudança de base

Sejam $\mathcal{S}$, $\mathcal{T} = (Y_1, \dots, Y_n)$ duas bases ordenadas de $\mathcal{V}$ e $X \in \mathcal{V}$.

Qual é a relação entre os vetores de coordenadas $[X]_{\mathcal{S}}$ e $[X]_{\mathcal{T}}$?

$$[X]_{\mathcal{T}} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} &\Rightarrow & X &= a_1 Y_1 + \cdots + a_n Y_n \\ &\Rightarrow & [X]_{\mathcal{S}} &= a_1 [Y_1]_{\mathcal{S}} + \cdots + a_n [Y_n]_{\mathcal{S}} \\ & & &= \underbrace{\begin{bmatrix} [Y_1]_{\mathcal{S}} & \cdots & [Y_n]_{\mathcal{S}} \end{bmatrix}}_{M(\mathcal{T},\mathcal{S})} \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}}_{[X]_{\mathcal{T}}} \end{aligned}$$

A matriz $M(\mathcal{T}, \mathcal{S})$, cujas colunas são os vetores de coordenadas na base $\mathcal{S}$ dos elementos da base $\mathcal{T}$ designa-se por matriz de mudança de base $\mathcal{T}$ para $\mathcal{S}$.

Mudança de base – Exemplo

Sejam $\mathcal{S} = \big((1,1),(1,2)\big)$ e $\mathcal{T} = \big((0,1),(1,-1)\big)$ bases ordenadas de $\mathbb{R}^2$.

Dado $X \in \mathbb{R}^2$ tal que $[X]_{\mathcal{T}} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, tem-se que

$$X = a\,(0,1) + b\,(1,-1).$$

Logo, $[X]_{\mathcal{S}} = a[(0,1)]_{\mathcal{S}} + b[(1,-1)]_{\mathcal{S}}$. Do exemplo anterior,

$$[(0,1)]_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad [(1,-1)]_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

então

$$[X]_{\mathcal{S}} = a\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}}_{M(\mathcal{T},\mathcal{S})} \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}}_{[X]_{\mathcal{T}}}.$$

Invertibilidade de uma matriz de mudança de base

Teorema: Sejam $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$ duas bases de um espaço vetorial $\mathcal{V}$. Então $M(\mathcal{T},\mathcal{S})$ é invertível e

$$M(\mathcal{T},\mathcal{S})^{-1} = M(\mathcal{S},\mathcal{T}).$$

Demonstração: Sejam $M = M(\mathcal{T},\mathcal{S})$, $\dim\mathcal{V} = n$ e $Y \in \mathbb{R}^n$ tal que $MY = 0$. Existe $X \in \mathcal{V}$ tal que $Y = [X]_{\mathcal{T}}$. Então

$$[X]_{\mathcal{S}} = M[X]_{\mathcal{T}} = M\,Y = 0 \quad \Rightarrow \quad X = 0_{\mathcal{V}} \quad \Rightarrow \quad Y = 0.$$

Mostrámos que o sistema homogéneo $M\,Y = 0$ possui apenas a solução trivial, ou seja, que M é invertível. Consequentemente, se $X \in \mathcal{V}$,

$$[X]_{\mathcal{S}} = M\,[X]_{\mathcal{T}} \quad \Rightarrow \quad [X]_{\mathcal{T}} = M(\mathcal{T},\mathcal{S})^{-1}[X]_{\mathcal{S}}.$$

pelo que $M^{-1} = M(\mathcal{S},\mathcal{T})$.

Mudança de base em $\mathbb{R}^n$

$\mathcal{S}$, $\mathcal{T}$: bases de $\mathbb{R}^n$ $\qquad$ $\mathcal{C}$: base canónica de $\mathbb{R}^n$

$$
\begin{tikzcd}
{[X]_{\mathcal{T}}} \arrow[rr, "M(\mathcal{T},\mathcal{S})"] \arrow[dr, "M(\mathcal{T},\mathcal{C})"'] & & {[X]_{\mathcal{S}}} \arrow[dl, shift right, "M(\mathcal{S},\mathcal{C})"'] \\
& {[X]_{\mathcal{C}}} \arrow[ur, shift right, "M(\mathcal{C},\mathcal{S}) = M(\mathcal{S},\mathcal{C})^{-1}"'] &
\end{tikzcd}
$$

$M(\mathcal{S},\mathcal{C})$: matriz cujas colunas são os vetores da base $\mathcal{S}$

$M(\mathcal{T},\mathcal{C})$: matriz cujas colunas são os vetores da base $\mathcal{T}$

$$M(\mathcal{T},\mathcal{S}) \;=\; M(\mathcal{C},\mathcal{S})\; M(\mathcal{T},\mathcal{C}) \;=\; M(\mathcal{S},\mathcal{C})^{-1}\; M(\mathcal{T},\mathcal{C})$$

Cálculo de uma matriz de mudança de base em $\mathbb{R}^n$

Dadas as bases $\mathcal{S} = (X_1, \ldots, X_n)$, $\mathcal{T} = (Y_1, \ldots, Y_n)$ de $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{C}$ a base canónica do mesmo espaço vetorial, a matriz $M(\mathcal{T}, \mathcal{S})$ pode obter-se por aplicação do método de eliminação de Gauss-Jordan:

$$\left[\, M(\mathcal{S},\mathcal{C}) \;\middle|\; M(\mathcal{T},\mathcal{C}) \,\right] = \left[\, X_1 \;\cdots\; X_n \;\middle|\; Y_1 \;\cdots\; Y_n \,\right] \sim \left[\, I_n \;\middle|\; M(\mathcal{T},\mathcal{S}) \,\right]$$

Exemplo: Para obtermos a matriz $M(\mathcal{T}, \mathcal{S})$ de mudança da base $\mathcal{T} = \big((0,1), (1,-1)\big)$ para a base $\mathcal{S} = \big((1,1), (1,2)\big)$, calculamos os seguintes vetores de coordenadas:

$$[(0,1)]_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad (0,1) = \alpha_1\,(1,1) + \alpha_2\,(1,2),$$

$$[(1,-1)]_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad (1,-1) = \beta_1\,(1,1) + \beta_2\,(1,2).$$

Tal conduz a dois sistemas

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

com a mesma matriz dos coeficientes (cujas colunas são os vetores de $\mathcal{S}$).

Os sistemas anteriores podem ser resolvidos em simultâneo, formando a matriz ampliada:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right],$$

$$M(\mathcal{T}, \mathcal{S}) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Conjunto ortogonal e ortonormado em $\mathbb{R}^n$

Um conjunto $\{X_1, \ldots, X_k\}$ de vetores de $\mathbb{R}^n$ diz-se

- ortogonal se $X_i \cdot X_j = 0$, para $i, j = 1, \ldots, k$, com $i \neq j$;
- ortonormado (o.n.) se é um conjunto ortogonal de vetores unitários ($||X_i|| = 1$, $i = 1, \ldots, k$).

Exemplo:

1. $\{(1,1,0),(2,-2,1)\}$ é ortogonal;
2. $\left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right), \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)\right\}$ é o.n.

Teorema: Todo o conjunto ortogonal de vetores não nulos é l.i.

Corolário: Todo o conjunto ortogonal de n vetores (não nulos) de $\mathbb{R}^n$ é uma base de $\mathbb{R}^n$.

Coordenadas de um vetor de $\mathbb{R}^n$ numa base o.n.

Teorema: Seja $X \in \mathbb{R}^n$ e $\mathcal{B} = (X_1, \ldots, X_n)$ uma base o.n. de $\mathbb{R}^n$. Então

$$[X]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} X \cdot X_1 \\ \vdots \\ X \cdot X_n \end{bmatrix},$$

isto é,

$$X = a_1 X_1 + \cdots + a_n X_n,$$

com $a_i = X \cdot X_i, \;\; i = 1, \ldots, n$.

Exemplo:
Determinar as coordenadas do vetor $(1, 5)$ na base o.n. de $\mathbb{R}^2$

$$\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right).$$

Projeção ortogonal em $\mathbb{R}^n$

Seja $\mathcal{W}$ um subespaço de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{B}$ uma base de $\mathcal{W}$ e $Y \in \mathbb{R}^n$. O vetor Y é ortogonal ao subespaço $\mathcal{W}$ se

$$Y \cdot Z = 0, \ \text{para } Z \in \mathcal{W}.$$

Teorema: O vetor Y é ortogonal a $\mathcal{W}$ se e só se Y é ortogonal a cada vetor de $\mathcal{B}$.

A projeção ortogonal de $X \in \mathbb{R}^n$ sobre o subespaço $\mathcal{W}$ de $\mathbb{R}^n$ é o vetor $Z \in \mathcal{W}$ tal que

$$X = Y + Z, \ \text{onde } Y \text{ é ortogonal a } \mathcal{W}.$$

O vetor Z denota-se por $\text{proj}_{\mathcal{W}} X$.

Projeção ortogonal sobre uma reta que passa na origem

Exemplo: Seja $\mathcal{W} = \langle X_1 \rangle$ uma reta, onde $\{X_1\}$ é uma base o.n. de $\mathcal{W}$.

Seja $X = \overrightarrow{OP}$, com $X = Y + Z$, onde Y é ortogonal a $\mathcal{W}$ (logo $Y \cdot X_1 = 0$) e

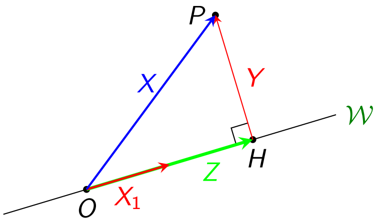
$$Z = \text{proj}_{\mathcal{W}} X = \alpha X_1.$$

Note-se que

$$X \cdot X_1 = Y \cdot X_1 + \alpha X_1 \cdot X_1 = \alpha,$$

concluindo-se que

$$\text{proj}_{\mathcal{W}} X = (X \cdot X_1) X_1.$$



Observação: $\text{dist}(P, \mathcal{W}) = \|Y\| = \|X - \text{proj}_{\mathcal{W}} X\|$.

Projeção ortogonal sobre um plano que passa na origem

Exemplo: Seja $\mathcal{W} = \langle X_1, X_2 \rangle$ um plano, $\{X_1, X_2\}$ uma base o.n. de $\mathcal{W}$ e $X = \overrightarrow{OP}$.

Verifica-se que $X = Z + Y$, com

$Z = \text{proj}_{\mathcal{W}} X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2$ e $Y \cdot X_1 = Y \cdot X_2 = 0.$

Então, sendo

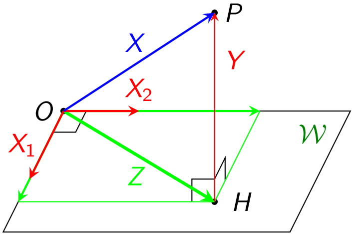
$$X = Y + Z = Y + \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2$$

vem

$$X \cdot X_1 = \alpha_1 \quad \text{e} \quad X \cdot X_2 = \alpha_2.$$

Logo,

$$\text{proj}_{\mathcal{W}} X = (X \cdot X_1) X_1 + (X \cdot X_2) X_2.$$



Observação: $\text{dist}(P, \mathcal{W}) = \|Y\| = \|X - \text{proj}_{\mathcal{W}} X\|.$

Projeção ortogonal em $\mathbb{R}^n$

Teorema: A projeção ortogonal de $X \in \mathbb{R}^n$ sobre o subespaço $\mathcal{W}$ de $\mathbb{R}^n$ é dada por

$$\mathrm{proj}_{\mathcal{W}} X \;=\; (X \cdot X_1)X_1 + \cdots + (X \cdot X_k)X_k \;\in\; \mathcal{W},$$

onde $\{X_1, \ldots, X_k\}$ é uma base o.n. de $\mathcal{W}$.

Nota:
O vetor $Y = X - \mathrm{proj}_{\mathcal{W}} X$ é ortogonal a todos os vetores de $\mathcal{W}$.

Método de ortogonalização de Gram-Schmidt

Teorema: Todo o subespaço $\mathcal{W} \neq \{0\}$ de $\mathbb{R}^n$ possui uma base o.n.

Demonstração:
Suponha-se que $\dim(\mathcal{W}) = m$ e $\{X_1, \ldots, X_m\}$ é uma base de $\mathcal{W}$. Seja

- $Y_1 = \frac{X_1}{\|X_1\|}$,
- $\mathcal{Z}_1 = \langle Y_1 \rangle$,
- $X_k' = X_k - \mathrm{proj}_{\mathcal{Z}_{k-1}} X_k$,
- $Y_k = \frac{X_k'}{\|X_k'\|}$,
- $\mathcal{Z}_k = \langle Y_1, \ldots, Y_k \rangle$, para $k = 2, \ldots, m$.

O conjunto $\mathcal{B} = \{Y_1, \ldots, Y_m\} \subset \mathcal{W}$ é o.n., logo l.i. e, consequentemente, é uma base o.n. de $\mathcal{W}$.

Exemplo:
Determinar uma base o.n. de $\langle (1, 1, 1, 1), (1, 2, -1, 3), (2, 1, -2, 2) \rangle$.