Cálculo I - agr. 4 Exame de recurso

1ª parte - resolução

1. (a) $\begin{cases} x>0 \\ -1\le 2+\ln x\le 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - \\ -3\le \ln x\le -1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - \\ e^{-3}\le x\le e^{-1}\end{cases}$

$\Leftrightarrow x\in[e^{-3}, e^{-1}]$. $D_f=[e^{-3}, e^{-1}]$.

(b) $f$ é contínua em $[e^{-3}, e^{-1}]$ e diferenciável em $]e^{-3}, e^{-1}[$.

$f'(x)=-\frac{1}{\sqrt{1-(2+\ln x)^2}}\left(1/x\right)$, $\forall x\in]e^{-3}, e^{-1}[$, logo $f$ é estritamente monótona decrescente $\Rightarrow$ $f$ tem o único máximo no ponto $x=e^{-3}$, $f(e^{-3})=\arccos(2+\ln(e^{-3}))=\pi$, e este máximo é global, e $f$ tem o único mínimo no ponto $x=e^{-1}$, $f(e^{-1})=\arccos(2+\ln(e^{-1}))=0$, e este mínimo é global.

2(a) $\frac{x^3+2x^2+2x+1}{x^3+x}=\frac{(x^3+x)+(2x^2+2x+1)}{x^3+x}=1+\frac{2x^2+x+1}{x(x^2+1)}$.

$\frac{2x^2+x+1}{x(x^2+1)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}=\frac{A(x^2+1)+x(Bx+C)}{x(x^2+1)}$

$2x^2+x+1=Ax^2+A+Bx^2+Cx$

$\begin{cases} 2=A+B \\ 1=C \\ 1=A\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1 \\ C=1 \\ B=1\end{cases}$. Logo $\frac{2x^2+x+1}{x(x^2+1)}=\frac{1}{x}+\frac{x+1}{x^2+1}$

$\int\left(1+\frac{1}{x}+\frac{x}{x^2+1}+\frac{1}{x^2+1}\right)dx = x+\ln|x|+\frac{1}{2}\int\frac{(x^2+1)'}{x^2+1}dx$

$+\operatorname{arctg} x = x+\ln|x|+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\operatorname{arctg} x+C$,

$C$ constante em intervalos

(b) $\int\frac{\sqrt{x}}{x^2+9x}dx=\int\frac{t}{t^4+9t^2}\cdot 2t\,dt$

C.A.: $\sqrt{x}=t$, $x=t^2$, $t>0$ (estritamente monótona crescente). $\frac{dx}{dt}=2t$

$=2\int\frac{1}{t^2+9}dt=\frac{2}{3}\int\frac{1}{1+(t/3)^2}\cdot\frac{1}{3}dt$

$=\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{t}{3}\right)+C=\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{x}}{3}\right)+C$, $C\in\mathbb{R}$.