Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

Álgebra Linear e Geometria Analítica

Agrupamento IV

25/02/2022 **Exame de recurso** **Duração: 2h30min**

Justifique detalhadamente as respostas e apresente os cálculos.

(5.0) 1. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -(\alpha+2) & -1 \\ 0 & 0 & \beta(\alpha+2) \end{bmatrix}$ e o vetor $B = \begin{bmatrix} 2 \\ \alpha - 2 \\ \beta \end{bmatrix}$, com α e β parâmetros reais.

(a) Determine, justificando, para que valores de α e β o sistema $AX = B$ é:

(i) possível e determinado, (ii) possível e indeterminado, (iii) impossível.

(b) Considere o plano $\mathcal{P}_1$ com equação geral $x+2y+z=2$ (primeira equação do sistema AX=B) e o plano $\mathcal{P}_2$ com equação geral $-(\alpha+2)y-z=\alpha-2$ (segunda equação do sistema AX=B).

(i) Determine a posição relativa de $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$, quando $\alpha = 2$.

(ii) Determine a distância entre o plano $\mathcal{P}_1$ e o plano $\mathcal{P}_3$ com equação geral $2x+4y+2z=6$.

(3.0) 2. Considere matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) Calcule o determinante de A.

(b) Verifique que A é invertível e calcule a matriz inversa de A.

(c) Determine uma matriz B tal que $\det(B) = 2\det(A)$.

(4.0) 3. Considere o subespaço S de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vetores $u_1 = (1,1,0)$, $u_2 = (1,-1,1)$ e $u_3 = (2,4,-1)$.

(a) Determine uma base de S e a dimensão de S.

(b) Determine os vetores ortogonais a u_1 e u_2 com norma igual a $\sqrt{6}$.

(c) Determine uma base de $\mathbb{R}^3$ que inclua **dois** vetores do conjunto $\{u_1, u_2, u_3\}$ e, se necessário, outros vetores. Justifique.

(4.0) 4. Considere matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$.

(a) Calcule os valores próprios e os subespaços próprios de A.

(b) Verifique que A é ortogonalmente diagonalizável e determine uma matriz ortogonal diagonalizante de A e a respetiva matriz diagonal semelhante a A.

(c) Determine uma equação reduzida e classifique a cónica com a equação geral

$$2x^2 - 4xy - y^2 - 4 = 0$$

(4.0) 5 Seja $\mathcal{C}_3$ a base canónica de $\mathbb{R}^3$ e $\mathcal{B} = ((-1,1,0),(1,0,1),(1,1,1))$ uma base de $\mathbb{R}^3$. Considere a aplicação linear $\phi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\phi(-1,1,0) = (0,0,-1)$, $\phi(1,0,1) = (2,1,1)$ e $\phi(1,1,1) = (2,1,2)$.

a) Determine a matriz de ϕ relativa às bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}_3$, isto é, a matriz $M(\phi, \mathcal{B}, \mathcal{C}_3)$.

b) Determine uma base e a dimensão da imagem de ϕ. ϕ é sobrejetiva? Justifique.

c) Calcule $\phi(1,2,1)$.