

Valores Próprios e Vetores Próprios

Álgebra Linear e Geometria Analítica - A

Soluções da Folha Prática 5

1. (a) A matriz possui apenas o valor próprio 0 e os vectores próprios associados são da forma

$$\begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

A matriz não é diagonalizável, pois é uma matriz 3×3 que possui apenas um vector próprio linearmente independente.

- (b) A matriz possui os valores próprios 3, 1, -2 e é diagonalizável, porque é uma matriz 3×3 com três valores próprios distintos. Os vectores próprios associados ao 3 são da forma

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 5x \\ 2x \end{bmatrix}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

os vectores próprios associados ao 1 são da forma

$$\begin{bmatrix} 6x \\ 3x \\ 8x \end{bmatrix}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

e os vectores próprios associados ao -2 são da forma

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x \end{bmatrix}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Assim

$$\begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \\ 2 & 8 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

são uma matriz diagonalizante e a correspondente matriz diagonal, respectivamente.

- (c) A matriz possui os valores próprios 3 e 1. Os vectores próprios associados ao 3 são da forma

$$\begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

e os vectores próprios associados ao 1 são da forma

$$\begin{bmatrix} x \\ -2x \\ -2y \\ y \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x, y \in \mathbb{R} \text{ não simultaneamente nulos.}$$

A matriz não é diagonalizável, pois é uma matriz 4×4 que possui no máximo três vectores próprios linearmente independentes.

(d) A matriz possui os valores próprios 3 e 1. Os vectores próprios associados ao 3 são da forma

$$\begin{bmatrix} 5x \\ 2x \\ -3x \end{bmatrix}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

e os vectores próprios associados ao 1 são da forma

$$\begin{bmatrix} -x \\ 0 \\ x \end{bmatrix}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

A matriz não é diagonalizável, pois é uma matriz 3×3 que possui no máximo dois vectores próprios linearmente independentes.

(e) A matriz possui os valores próprios 4 e 2. Os vectores próprios associados ao 4 são da forma:

$$\begin{bmatrix} -x \\ x \\ x \end{bmatrix}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

e os vectores próprios associados ao 2 são da forma:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ -y \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad x, y \in \mathbb{R} \text{ não simultaneamente nulos.}$$

A matriz é diagonalizável, pois é uma matriz 3×3 que possui três vectores próprios linearmente independentes, sendo

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

uma sua matriz diagonalizante e a correspondente matriz diagonal, respectivamente.

2. (a) 1 é um valor próprio de A pois $\det(A - 1I_3) = 0$; $U_1 = \{(-\frac{5}{2}z, -2z, z), z \in \mathbb{R}\}$.

(b) A é diagonalizável e $D = \begin{bmatrix} 1 + \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \sqrt{5} \end{bmatrix}$.

8. (a) $P = \begin{bmatrix} 7 & 1 & -1 \\ -4 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;

(b) $A^5 = \begin{bmatrix} 32 & -1147 & 1178 \\ 0 & 683 & -682 \\ 0 & -341 & 342 \end{bmatrix}$.

9. $a = b = 1$.

10. (a) $p_A(\lambda) = \lambda^2 - (k+1)\lambda + k$ e os valores próprios de A são 1 e k .

(b) $k \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

(c) i. $U_k = \{(x, -kx) : x \in \mathbb{R}\}$;

ii. $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$ e $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -k \end{bmatrix}$; (confirmar!)

iii. I_2 .

11. (a) $p_A(\lambda) = \lambda^2 - \lambda^4$ e os valores próprios de A são $0, 1$ e -1 .

(b) Sim, sim.

13. (a) $P = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$ é uma matriz ortogonal tal que $P^T A P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

(b) $P = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}$ é uma matriz ortogonal tal que $P^T A P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.

(c) $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$ é uma matriz ortogonal tal que $P^T A P = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

14. (a) 9 é um valor próprio de A pois $\det(A - 9I_3) = 0$.

(b) $P = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ é uma matriz ortogonal tal que $P^T A P = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$.

15. (a) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = z\}$.

(b) A é diagonalizável, pois A é simétrica e $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$.

16. (a) Semi-definida negativa. (b) indefinida. (c) Semi-definida positiva. (d) Definida negativa.