Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro

Álgebra Linear e Geometria Analítica — Agrup. IV

1.ª ***Prova de Avaliação Discreta; 27 de outubro de 2017***

Duração: **1h30min**

– Justifique todas as respostas e indique os cálculos efetuados –

[60pts] 1. Considere as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Calcule, caso exista: CA e CD.

(b) Encontre a matriz escalonada por linhas reduzida equivalente a D. Qual é a característica de D?

(c) Considere $E = CD$. Verifique que a matriz E é invertível e calcule a sua inversa.

(d) Resolva a equação matricial $XE^T + A = B$, em ordem a X, e calcule a respetiva solução.

[30pts] 2. Discuta, em função dos parâmetros reais a e b, o seguinte sistema de equações usando as caracteristicas da sua matriz dos coeficientes e da sua matriz ampliada,

$$\begin{cases} 2x_1 + ax_2 - x_3 = 0 \\ x_2 + bx_3 = 1 \\ -2x_1 + x_3 = b \end{cases}.$$

[30pts] 3. Considere $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$.

(a) Verifique que $(1, -1, 1)$ é uma solução de $AX = B$.

(b) Indique, justificando, um elemento não nulo do espaço das colunas de A.

(c) Calcule $\mathcal{N}(A)$, o espaço nulo de A.

(d) Escreva o conjunto das soluções do sistema $AX = B$.

[15pts] 4. Sabendo que $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 5$, calcule $\begin{vmatrix} a_1 + 2c_1 & 3c_1 & b_1 \\ a_2 + 2c_2 & 3c_2 & b_2 \\ a_3 + 2c_3 & 3c_3 & b_3 \end{vmatrix}$.

[30pts] 5. Mostre que a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ é invertível e calcule o elemento $(1, 3)$ da matriz inversa de A, usando a sua adjunta.

[20pts] 6. Sejam $X = (1, 0, 1, -2)$ e $Y = (1, 1, 0, -1)$ vetores de $\mathbb{R}^4$.

(a) Calcule o ângulo entre X e Y.

(b) X e Y são colineares? X e Y são ortogonais? Justifique.

[15pts] 7. O traço de uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ é a soma de todos elementos da sua diagonal principal e denota-se por Tr(A). Com base nesta definição, mostre que

$$\text{Tr}(AA^T) \geq 0, \text{ qualquer que seja a matriz quadrada } A.$$