

Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

# CÁLCULO II

- Texto de Apoio -

Alexandre Almeida

fevereiro de 2018

## Nota prévia

Este texto foi escrito com o propósito de apoiar as aulas de Cálculo II lecionadas na Universidade de Aveiro, podendo ser visto também como um guião para esta unidade curricular. Não se pretende com isto substituir as aulas, mas antes proporcionar um melhor acompanhamento das mesmas por parte dos alunos. São assumidos conhecimentos prévios básicos (adquiridos no ensino secundário e em Cálculo I) sobre o estudo de funções reais de variável real, sobre cálculo diferencial e integral e sobre séries numéricas.

Trata-se de um texto resumido onde se tenta motivar a introdução dos vários conceitos relacionados com equações diferenciais ordinárias e séries de funções. Atendendo ao formato pretendido, optou-se por não se apresentar provas dos resultados formulados, apesar de alguns casos conduzirem a uma argumentação muito próxima daquilo que seria uma prova formal.

A leitura deste material deverá ser complementada com a consulta de bibliografia complementar. Para além dos diversos livros clássicos sobre Cálculo (alguns deles indicados na lista de referências), sugere-se, em particular, a leitura dos apontamentos [12] (disponíveis na plataforma *Moodle* da Universidade de Aveiro), onde poderão ser encontradas quase todas as provas dos resultados aqui apresentados, bem como vários outros exemplos e exercícios propostos.

Gostaria de deixar um agradecimento aos muitos colegas que comigo trabalharam em Cálculo II (de 2010 a 2012, e mais recentemente em 2014) pelos diversos comentários e sugestões a anteriores versões deste texto.

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Séries de Potências e Fórmula de Taylor</b>	<b>4</b>
1.1	Séries de potências . . . . .	4
1.2	Fórmula de Taylor . . . . .	10
1.2.1	Polinômios de Taylor . . . . .	11
1.2.2	Teorema de Taylor . . . . .	13
1.3	Série de Taylor . . . . .	16
<b>2</b>	<b>Sucessões e Séries de Funções</b>	<b>21</b>
2.1	Convergência pontual e convergência uniforme de sucessões de funções . . . . .	21
2.2	Séries de funções (em geral) . . . . .	27
2.2.1	Convergência pontual e convergência uniforme . . . . .	27
2.2.2	Séries de potências (revisitado) . . . . .	30
2.3	Séries (trigonométricas) de Fourier . . . . .	36
2.3.1	Série e coeficientes de Fourier . . . . .	37
2.3.2	Convergência da série de Fourier . . . . .	44
2.3.3	Aplicação ao cálculo da soma de séries numéricas . . . . .	47
<b>3</b>	<b>Extremos de Funções Reais de Várias Variáveis Reais</b>	<b>49</b>
<b>4</b>	<b>Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs)</b>	<b>50</b>
4.1	Introdução . . . . .	50
4.2	Definições e terminologia . . . . .	54
4.3	Equações diferenciais de primeira ordem . . . . .	61
4.3.1	EDOs de variáveis separáveis . . . . .	61
4.3.2	EDOs homogêneas . . . . .	65
4.3.3	EDOs exatas . . . . .	67
4.3.4	EDOs lineares (de primeira ordem) . . . . .	70
4.3.5	Equações de Bernoulli . . . . .	73
4.3.6	Aplicação ao estudo de trajetórias ortogonais . . . . .	74
4.4	Equações lineares de ordem arbitrária . . . . .	76

4.4.1	Equações lineares homogéneas . . . . .	79
4.4.2	Método da variação das constantes . . . . .	81
4.5	Equações lineares de coeficientes constantes . . . . .	86
4.5.1	Solução geral de equações homogéneas . . . . .	86
4.5.2	Método dos coeficientes indeterminados na determinação de soluções particulares . . . . .	90
<b>5</b>	<b>Transformada de Laplace</b>	<b>93</b>
5.1	Definição e propriedades . . . . .	93
5.2	Transformada de Laplace inversa . . . . .	102
	<b>Referências</b>	<b>107</b>

# 1 Séries de Potências e Fórmula de Taylor

## 1.1 Séries de potências

Neste capítulo vamos estudar séries cujos termos envolvem potências. Tratando-se, em geral, da soma de uma infinidade de parcelas, tais séries constituirão uma generalização dos polinômios (os quais correspondem a somas de um número finito de parcelas).

### Definição 1.1 (Série de potências)

Chama-se **série de potências centrada em**  $c \in \mathbb{R}$  (ou **série de potências de**  $x - c$ ) a uma série da forma <sup>1</sup>

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - c)^n = a_0 + a_1(x - c) + a_2(x - c)^2 + \cdots + a_n(x - c)^n + \cdots$$

onde  $a_n \in \mathbb{R}$  para todo  $n \in \mathbb{N}_0$ . Os números  $a_n$  são os **coeficientes da série**.

**Exemplo 1.1** Na série de potências centrada na origem (i.e., no ponto  $c = 0$ )

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots \quad (1.1)$$

todos os coeficientes são iguais a 1. Tratando-se de uma série geométrica de razão  $x \in \mathbb{R}$ , esta série é (absolutamente) convergente se, e só se,  $|x| < 1$ . Além disso, para tais valores de  $x$ , conhecemos mesmo o valor da sua soma:

$$\frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots \quad \text{para } x \in ] - 1, 1[. \quad (1.2)$$

Repare-se que (1.2) fornece uma representação em série de potências de  $x$  para a função definida por  $\frac{1}{1 - x}$  no intervalo  $] - 1, 1[$ . Uma das questões fundamentais que trataremos mais adiante é a possibilidade de escrever uma dada função através de uma série de potências. Aliás, a importância destas

---

<sup>1</sup>Usamos a convenção habitual  $0^0 = 1$ , a qual está sempre implícita no estudo que se segue.

séries reside precisamente no facto de muitas funções conhecidas se poderem representar nesta forma. Este assunto será discutido no próximo capítulo. Nessa altura, discutiremos também a possibilidade de operar sobre uma série de potências (i.e., derivar, primitivar, etc.).

Dada uma série de potências  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - c)^n$  importa, desde já, saber identificar o conjunto de pontos  $x \in \mathbb{R}$  para os quais esta é convergente. O conjunto de tais pontos designa-se por **domínio de convergência** da série. Por exemplo, o domínio de convergência da série (1.1) é o intervalo  $] - 1, 1[$ . Vejamos outros exemplos:

**Exemplo 1.2** Consideremos a série de potências de  $x$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \quad (1.3)$$

cujos coeficientes são dados por  $a_n = \frac{1}{n!}$ . Tivemos oportunidade de observar no capítulo anterior que se  $x = 1$  a série (numérica respetiva  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ ) é convergente e tem soma  $e$  (embora este último facto ainda não tenha sido provado). Consequentemente, por comparação, conclui-se que a série (1.3) converge (absolutamente) se  $|x| \leq 1$ . No entanto, podemos verificar facilmente através do Critério de D'Alembert que a série é (absolutamente) convergente para qualquer  $x \in \mathbb{R}$ , pelo que o seu domínio de convergência é  $\mathbb{R}$ .

**Exemplo 1.3** A série de potências

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (x + 1)^n$$

(centrada em  $c = -1$ ) converge (absolutamente) se  $x \in ] - 2, 0[$  e diverge se  $x \in ] - \infty, -2[ \cup ] 0, +\infty[$  (como consequência da aplicação do Critério de D'Alembert ou do Critério da Raiz). Esta série também converge (simplesmente) para  $x = 0$  (tal resulta do Critério de Leibniz) e diverge se  $x = -2$ . Consequentemente, o seu domínio de convergência é o intervalo  $] - 2, 0[$ .

Repare-se que, para qualquer série de potências  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ , o ponto  $c$  onde esta está centrada pertence sempre ao seu domínio de convergência (sendo a respetiva soma igual ao coeficiente  $a_0$ ). *Mas haverá alguma série que seja convergente apenas no ponto onde está centrada?* A resposta é afirmativa. Veja-se o seguinte exemplo:

**Exemplo 1.4** Considere-se a série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!(x-2)^n. \quad (1.4)$$

Uma aplicação do Critério da Raiz (ou do Critério de D'Alembert) permite concluir que esta série diverge para cada  $x \neq 2$ . Assim, o domínio de convergência desta série reduz-se ao conjunto singular  $\{2\}$ .

Os exemplos anteriores sugerem que o domínio de convergência de uma série de potências apresenta sempre a forma de um intervalo (simétrico em relação ao ponto onde a série está centrada). Na verdade, é possível provar que tal se verifica para qualquer série de potências. Além disso, em muitas situações, podemos também determinar o comprimento desse intervalo de um modo relativamente simples.

**Teorema 1.2** *Para qualquer série de potências  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$  verifica-se uma, e uma só, das seguintes proposições:*

- (i) *a série converge (absolutamente) em  $x = c$  e diverge se  $x \neq c$ ;*
- (ii) *a série converge absolutamente em todo  $x \in \mathbb{R}$ ;*
- (iii) *existe um único  $R > 0$  para o qual a série converge absolutamente se  $|x - c| < R$  e diverge se  $|x - c| > R$ .*

**Definição 1.3 (Raio de convergência; intervalo de convergência)**

*O número  $R$  referido no Teorema 1.2 designa-se por **raio de convergência** da série  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ . Diz-se também que a série tem raio de convergência nulo ( $R = 0$ ) na situação (i) e que tem raio de convergência infinito*

( $R = +\infty$ ) quando ocorre (ii).

Quando  $R \neq 0$  o intervalo  $]c - R, c + R[$  designa-se por **intervalo de convergência** da série (sendo este todo o conjunto  $\mathbb{R}$  quando  $R = +\infty$ ).

Os raios de convergência das séries (1.1), (1.3) e (1.4) são, respetivamente,  $R = 1$ ,  $R = +\infty$  e  $R = 0$ .

**Observação 1.1** A partir do Teorema 1.2 fica claro que o domínio de convergência de uma série de potências  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - c)^n$  toma sempre a forma de um intervalo centrado em  $c$  (que pode degenerar no conjunto singular  $\{c\}$  - caso (i) - e pode também ser todo o  $\mathbb{R}$  - caso (ii)).

**Observação 1.2** O Teorema 1.2 nada afirma sobre a natureza da série nas extremidades  $x = c - R$  e  $x = c + R$ . Nestes pontos o estudo da série terá de ser efetuado caso a caso.

Como vimos, a determinação do domínio de convergência de uma série de potências poderá passar pelo cálculo do seu raio de convergência. Por sua vez, em muitos casos, este último pode ser determinado a partir dos coeficientes da série.

Considere-se a série  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - c)^n$ , supondo  $a_n \neq 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Suponha-se que existe o limite  $\ell := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ . Já vimos que a série converge se  $x = c$ . Para  $x \neq c$ , temos

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}(x - c)^{n+1}}{a_n(x - c)^n} \right| = \ell |x - c|.$$

O Critério de D'Alembert permite concluir o seguinte:

- Se  $\ell = 0$ , então  $L = 0 (< 1)$ , pelo que a série é absolutamente convergente para qualquer  $x \neq c$ . Assim, o raio de convergência é infinito e o domínio de convergência é  $\mathbb{R}$ .
- Se  $\ell = +\infty$ , então  $L = +\infty$  e, conseqüentemente, a série é divergente para qualquer  $x \neq c$ . Assim, o raio de convergência é nulo e o domínio de convergência reduz-se ao conjunto singular  $\{c\}$ .

- Se  $\ell \in ]0, +\infty[$ , então a série converge absolutamente se  $L = \ell |x - c| < 1$ , ou seja, se

$$|x - c| < 1/\ell \Leftrightarrow x \in ]c - 1/\ell, c + 1/\ell[$$

e diverge se  $L = \ell |x - c| > 1$ , i.e.,

$$|x - c| > 1/\ell \Leftrightarrow x \in ]-\infty, c - 1/\ell[ \cup ]c + 1/\ell, +\infty[.$$

Neste caso, o raio de convergência é  $1/\ell$  e  $]c - 1/\ell, c + 1/\ell[$  é o intervalo de convergência. A determinação do domínio de convergência fica dependente do estudo da natureza das séries numéricas que se obtêm para  $x = c - 1/\ell$  e  $x = c + 1/\ell$ .

A dedução anterior conduziu-nos a uma fórmula para o cálculo do raio de convergência:

**Proposição 1.1** *Seja  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$  uma série de potências com coeficientes não nulos. Se existir o limite  $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ , então o raio de convergência  $R$  é dado por*

$$R = \frac{1}{\ell} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}. \quad (1.5)$$

**Observação 1.3** Seguindo um raciocínio semelhante ao anterior, mas agora baseado no Critério da Raiz, também se conclui que, caso exista o limite  $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ , o raio de convergência também pode ser dado por

$$R = \frac{1}{\ell} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} \quad (1.6)$$

(supondo  $a_n \neq 0$  para validar a segunda igualdade).

**Exemplo 1.5** Vamos determinar o raio e o domínio de convergência da série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{5^n \sqrt{n+1}}.$$

Como  $a_n = \frac{1}{5^n \sqrt{n+1}} \neq 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}_0$ , o raio de convergência é dado por

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left| \frac{1}{5^n \sqrt{n+1}} \right|}{\left| \frac{1}{5^{n+1} \sqrt{n+2}} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{n+1} \sqrt{n+2}}{5^n \sqrt{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 5 \sqrt{\frac{n+2}{n+1}} = 5.$$

Portanto, a série converge absolutamente nos pontos  $x$  tais que  $|x + 2| < 5$  e diverge nos pontos  $x$  tais que  $|x + 2| > 5$ . Resta averiguar o que se passa nos pontos  $x$  tais que  $|x + 2| = 5$ , *i.e.*, nas extremidades do intervalo de convergência  $] - 7, 3[$ .

Se  $x = -7$ , obtemos a série numérica  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ , que é simplesmente convergente [Justifique!].

Se  $x = 3$ , obtemos a série numérica  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ , a qual é divergente [Justifique!].

Resumindo, o domínio de convergência da série indicada é o intervalo  $[-7, 3[$ , sendo a série absolutamente convergente em  $] - 7, 3[$  e simplesmente convergente no ponto  $x = -7$ .

Note-se que a determinação do domínio de convergência de uma série de potências não exige o conhecimento prévio do respetivo raio de convergência. Na verdade, tal domínio poderá ser determinado por aplicação direta dos critérios de convergência (tipicamente o Critério de D'Alembert ou o Critério da Raiz), à semelhança com o que se fez no estudo das séries (1.3) e (1.4)). Em certos casos, não podemos mesmo usar as fórmulas (1.5) e (1.6) diretamente.

**Exemplo 1.6** Considere-se a série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{3^n} = 1 + 0 \cdot x + \frac{1}{3}x^2 + 0 \cdot x^3 + \frac{1}{9}x^4 + \dots$$

Temos uma infinidade de coeficientes nulos, mais precisamente,

$$a_{2k} = \frac{1}{3^k} \quad \text{e} \quad a_{2k+1} = 0 \quad (k \in \mathbb{N}_0).$$

Como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{x^{2n}}{3^n} \right|} = \frac{|x|^2}{3}, \quad x \in \mathbb{R},$$

resulta do Critério da Raiz que a série converge (absolutamente) se

$$\frac{|x|^2}{3} < 1 \Leftrightarrow x \in ] - \sqrt{3}, \sqrt{3}[$$

e diverge se

$$\frac{|x|^2}{3} > 1 \Leftrightarrow x \in ]-\infty, -\sqrt{3}[ \cup ]\sqrt{3}, +\infty[.$$

Uma vez que a série também diverge nos pontos  $x = -\sqrt{3}$  e  $x = \sqrt{3}$  [Verifique!], conclui-se que o domínio de convergência desta série de potências é o intervalo  $] -\sqrt{3}, \sqrt{3}[$ .

**Observação 1.4** O raio de convergência da série anterior poderá ser determinado através das fórmulas (1.5) ou (1.6), se se efetuar previamente a mudança de variável  $y = x^2$  [Verifique!]. *O que aconteceria se se aplicasse uma daquelas fórmulas para a determinação do raio, considerando, erradamente,  $a_n = \frac{1}{3^n}$ ?*

## 1.2 Fórmula de Taylor

Dada a sua simplicidade, podemos pensar em usar polinómios para aproximar funções não tão simples de trabalhar. Do ponto de vista numérico, os polinómios são facilmente calculados visto envolverem apenas produtos e somas.

Suponhamos que se pretendia aproximar a função exponencial  $f(x) = e^x$ . O polinómio do primeiro grau

$$L(x) = f(0) + f'(0)x = 1 + x$$

permite aproximar a função  $f$  (pelo menos numa vizinhança do ponto  $x = 0$ ). Este assunto não é novo se nos recordarmos do significado geométrico do conceito de derivada. De facto,  $L(x)$  dá-nos uma *aproximação linear* de  $f$  que, do ponto de vista geométrico, traduz uma aproximação do gráfico de  $f$  pela reta que lhe é tangente no ponto  $(0, f(0)) = (0, 1)$ . Repare-se que  $L(0) = 1 = f(0)$  e  $L'(0) = 1 = f'(0)$ .

Pensemos agora na possibilidade de aproximar a função exponencial através de um polinómio quadrático,

$$Q(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2,$$

por forma a que  $Q(0) = f(0)$ ,  $Q'(0) = f'(0)$  e  $Q''(0) = f''(0)$ . Depois de alguns cálculos imediatos, concluímos que os coeficientes de  $Q(x)$  são  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = 1$  e  $a_2 = \frac{1}{2}$ .

Em comparação com a aproximação linear, é de esperar que a *aproximação quadrática* assegure melhores resultados quando se aproxima  $f$  (em torno do ponto  $x = 0$ ), até porque se está a usar agora mais informação sobre a própria função (nomeadamente, sobre a segunda derivada). Poderíamos usar também uma *aproximação cúbica* e assim sucessivamente. De facto,  $L(x)$  e  $Q(x)$  traduzem apenas as primeiras etapas de um processo de aproximação polinomial que tenderá a ser mais preciso. Podemos verificar que o polinómio de grau  $n$

$$P(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n$$

satisfaz as condições

$$P^{(k)}(0) = 1 = f^{(k)}(0), \quad \forall k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$$

(usando a notação habitual para as derivadas de  $f$ , onde  $f^{(0)} := f$ ). Naturalmente, para aproximarmos os valores da função exponencial através do polinómio  $P(x)$  é importante ter-se alguma informação sobre o erro cometido na aproximação. O Teorema 1.4 dará uma resposta a esta questão.

### 1.2.1 Polinómios de Taylor

Considere-se, em geral, uma função  $f$  admitindo derivadas finitas até à ordem  $n \in \mathbb{N}$ , num dado ponto  $c \in \mathbb{R}$ . Por derivação sucessiva, não é difícil verificar que se o polinómio (de grau  $\leq n$ )

$$P(x) = a_0 + a_1(x - c) + a_2(x - c)^2 + \cdots + a_n(x - c)^n$$

satisfaz as condições

$$P(c) = f(c), \quad P'(c) = f'(c), \quad \dots, \quad P^{(n)}(c) = f^{(n)}(c), \quad (1.7)$$

então

$$a_k = \frac{f^{(k)}(c)}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n \quad (1.8)$$

(convencionando  $0! = 1$  como é usual). Reciprocamente, se os coeficientes do polinómio  $P(x)$  forem dados por (1.8), então  $P(x)$  satisfaz as  $(n + 1)$  condições (1.7). Portanto,

$$T_c^n f(x) := \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (x - c)^k$$

é o único polinómio (de grau  $\leq n$ ) que possui a propriedade indicada em (1.7). O polinómio  $T_c^n f(x)$  designa-se por **polinómio de Taylor**<sup>2</sup> de ordem  $n$  da função  $f$  no ponto  $c$ . No caso particular em que  $c = 0$ ,  $T_0^n f(x)$  é também conhecido por **polinómio de MacLaurin**<sup>3</sup> (de ordem  $n$  da função  $f$ ).

**Exemplo 1.7** Temos  $T_1^n(x^3) = x^3$  para  $n \geq 3$ .

**Exemplo 1.8** Como  $(e^x)^{(k)}(0) = 1$  para todo  $k \in \mathbb{N}_0$ , então

$$T_0^n(e^x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

**Exemplo 1.9** Uma vez que  $\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(k)}(0) = k!$  para todo  $k \in \mathbb{N}$  (facto que pode ser provado usando indução matemática), então (para  $x \neq 1$ ) temos

$$T_0^n\left(\frac{1}{1-x}\right) = \sum_{k=0}^n x^k = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

**Exemplo 1.10** No caso da função seno tem-se

$$\text{sen}^{(2k+1)}(0) = (-1)^k, \quad \text{sen}^{(2k)}(0) = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}_0.$$

Então o polinómio de MacLaurin de ordem  $2n + 1$  da função seno possui apenas potências ímpares de  $x$ :

$$T_0^{2n+1}(\text{sen } x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

<sup>2</sup>Brook Taylor (1685–1731) foi um matemático inglês que usou pela primeira vez representações de funções através de séries de potências, embora sem se preocupar com questões de convergência.

<sup>3</sup>Colin MacLaurin (1698–1746) foi um matemático escocês que deu importantes contributos para a Física Matemática. No seu trabalho “Tratado de Fluxões” aparece a fórmula sobre a representação de uma função em série de potências centrada na origem.

**Exemplo 1.11** As derivadas de ordem ímpar da função co-seno são todas nulas na origem. As suas derivadas de ordem par no mesmo ponto tomam os valores -1 ou 1 (de forma alternada). Portanto, o polinómio de MacLaurin de ordem  $2n$  desta função contém apenas potências pares de  $x$ :

$$T_0^{2n}(\cos x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

**Observação 1.5** Note-se que o polinómio de MacLaurin da função co-seno é a derivada do polinómio de MacLaurin da função seno. De certa forma, tal era esperado em virtude da já conhecida relação  $(\operatorname{sen} x)' = \cos x$ .

**Observação 1.6** Para qualquer polinómio de grau  $n$ ,  $P_n(x)$ , tem-se

$$T_c^n P_n(x) = P_n(x) \quad (\text{para qualquer } c \in \mathbb{R}).$$

**Observação 1.7** Recordando que  $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$  para todo  $x \in ]-1, 1[$ , então o polinómio  $T_0^n\left(\frac{1}{1-x}\right)$  (indicado no Exemplo 1.9) representa o termo geral da sucessão das somas parciais associada à série de potências  $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ . Portanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_0^n\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{1-x}, \quad \forall x \in ]-1, 1[.$$

### 1.2.2 Teorema de Taylor

O seguinte resultado pode ser provado usando indução matemática e a técnica de integração por partes.

#### **Teorema 1.4 (Fórmula de Taylor com resto integral)**

Sejam  $n \in \mathbb{N}_0$ ,  $f$  uma função real com derivadas contínuas até à ordem  $(n+1)$  num intervalo  $I$  e  $c \in I$ . Então, para todo  $x \in I$ , temos

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (x-c)^k + \frac{1}{n!} \int_c^x f^{(n+1)}(t) (x-t)^n dt. \quad (1.9)$$

Repare-se que o caso particular  $n = 0$  corresponde à fórmula de Barrow para integrais (já estudada em Cálculo I).

**Observação 1.8** A igualdade (1.9) é conhecida como a **fórmula de Taylor de ordem  $n$**  (da função  $f$  no ponto  $c$ ). Quando  $c = 0$  esta igualdade é também conhecida como a **fórmula de MacLaurin de ordem  $n$**  (da função  $f$ ), em analogia com a designação já usada para os polinómios.

**Observação 1.9** O lado direito da fórmula (1.9) contém o polinómio de Taylor de ordem  $n$  mais uma última parcela que representa o *resto*. Mais precisamente, temos

$$f(x) = T_c^n f(x) + R_c^n f(x)$$

com

$$R_c^n f(x) := \frac{1}{n!} \int_c^x f^{(n+1)}(t) (x-t)^n dt.$$

Neste caso, o resto é dado na forma integral. Existem outras formas de escrever o resto da fórmula de Taylor. Uma das mais conhecidas é *resto de Lagrange* (cf. Corolário 1.5).

Usando resultados já conhecidos sobre integrais (nomeadamente, o Teorema do Valor Médio), podemos mostrar que o resto da fórmula de Taylor também se pode escrever à custa das derivadas da função envolvida.

**Corolário 1.5 (Fórmula de Taylor com resto de Lagrange)**

Sejam  $n \in \mathbb{N}_0$ ,  $f$  uma função real com derivadas contínuas até à ordem  $(n+1)$  num intervalo  $I$  e  $c \in I$ . Então, para todo  $x \in I \setminus \{c\}$ , existe  $\theta$  entre  $c$  e  $x$  tal que

$$f(x) = T_c^n f(x) + \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!} (x-c)^{n+1}. \tag{1.10}$$

No caso em que  $n = 0$ , o resultado anterior assegura a existência de  $\theta$  entre  $c$  e  $x$  tal que

$$f(x) = f(c) + f'(\theta)(x-c), \quad \text{ou seja,} \quad \frac{f(x) - f(c)}{x-c} = f'(\theta),$$

o que corresponde ao Teorema de Lagrange (já estudado em Cálculo I).

Usando a fórmula de Taylor podemos obter uma estimativa para o erro que se comete ao aproximar os valores  $f(x)$  pelos polinómios  $T_c^n f(x)$ . De

facto, se a  $(n + 1)$ -ésima derivada da função  $f$  é contínua num intervalo  $[a, b]$  contendo o ponto  $c$ , então esta é limitada neste intervalo. Assim, partindo da fórmula de Taylor com resto de Lagrange, obtemos

$$|R_c^n f(x)| = |f(x) - T_c^n f(x)| \leq \frac{|f^{(n+1)}(\theta)|}{(n+1)!} |x - c|^{n+1} \leq M \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

onde  $M = \sup_{y \in [a, b]} |f^{(n+1)}(y)|$  e  $x \in [a, b]$ . Isto dá-nos uma majoração para o erro cometido na aproximação. De modo análogo, se usarmos o resto na forma integral, nas condições anteriores podemos também escrever

$$|R_c^n f(x)| = |f(x) - T_c^n f(x)| \leq \frac{(b-a)^n}{n!} \int_a^b |f^{(n+1)}(t)| dt \leq M \frac{(b-a)^{n+1}}{n!}$$

para todo  $x \in [a, b]$  [Verifique!].

**Exemplo 1.12** Vamos escrever a fórmula de MacLaurin de ordem 3 da função  $f(x) = \sqrt{x+1}$ ,  $x > -1$ , com resto de Lagrange. Após alguns cálculos (envolvendo as derivadas da função  $f$ ), verificamos que o polinómio de MacLaurin de terceira ordem é

$$T_0^3 f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3.$$

O resto de Lagrange (de ordem 3) é dado por

$$R_0^3 f(x) = \frac{f^{(4)}(\theta)}{4!}x^4 = -\frac{5}{128} \frac{x^4}{\sqrt{(\theta+1)^7}}$$

para algum  $\theta$  entre 0 e  $x$  (sendo a existência de tal  $\theta$  garantida pelo Teorema de Taylor). A fórmula de MacLaurin de terceira ordem com resto de Lagrange é dada por

$$\sqrt{x+1} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128\sqrt{(\theta+1)^7}}x^4 \quad (\theta \text{ entre } 0 \text{ e } x).$$

Podemos usar o polinómio  $T_0^3 f(x)$  para obter um valor aproximado de  $\sqrt{2} = f(1)$ :

$$\sqrt{2} \simeq T_0^3 f(1) = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = 1,4375.$$

Sabendo que  $\theta \in ]0, 1[$ , o erro cometido nesta aproximação pode ser estimado do seguinte modo:

$$|R_0^3 f(1)| = \frac{5}{128\sqrt{(\theta + 1)^7}} \leq \frac{5}{128} = 0,0390625.$$

**Exemplo 1.13** Voltemos à questão da aproximação da função exponencial  $f(x) = e^x$  em torno da origem. Como  $f^{(k)}(0) = 1$  para qualquer ordem  $k$ , temos a fórmula (de MacLaurin)

$$e^x = \underbrace{1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}}_{T_0^n f(x)} + \underbrace{\frac{e^\theta}{(n+1)!} x^{n+1}}_{R_0^n f(x)} \quad (\theta \text{ entre } 0 \text{ e } x).$$

Podemos, por exemplo, aproximar  $e^x$  no intervalo  $[0, 1]$ . Como a função exponencial é crescente neste intervalo e  $e < 3$ , temos

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \leq R_0^n f(x) < 3 \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}, \quad x \in [0, 1].$$

Em particular, para  $x = 1$ , podemos obter aproximações do número  $e$  com qualquer grau de precisão:

$$e \simeq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!},$$

sendo o respetivo erro controlado (neste caso superior e inferiormente) por

$$\frac{1}{(n+1)!} \leq R_0^n f(1) < \frac{3}{(n+1)!}.$$

Por exemplo, sem se pretender aprofundar questões de cálculo numérico, fica a informação que bastaria tomar  $n = 12$  para garantir uma aproximação de  $e$  com 7 casas decimais ( $e \simeq 2,7182818$ ) com um erro inferior a  $0,5 \times 10^{-8}$ .

### 1.3 Série de Taylor

Relativamente a uma série de potências  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$  já tivemos oportunidade de discutir a determinação do seu domínio de convergência (i.e., o conjunto dos valores de  $x$  para os quais a série é convergente). Estamos agora

interessados em estabelecer condições que garantam que uma dada função  $f$  possa ser representada através de uma série de potências.

Já vimos que

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots, \quad -1 < x < 1. \quad (1.11)$$

Substituindo  $x$  por  $-x$ , obtemos a representação

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + \dots, \quad -1 < x < 1.$$

Se substituirmos  $x$  por  $x^2$  nesta última obtemos

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^n x^{2n} + \dots, \quad -1 < x < 1, \quad (1.12)$$

e multiplicando ambos os membros desta igualdade por  $x$  também se obtém

$$\frac{x}{1+x^2} = x - x^3 + x^5 - x^7 + \dots + (-1)^n x^{2n+1} + \dots, \quad -1 < x < 1.$$

A representação destas funções em série de potências foi obtida através de simples manipulações da série geométrica (1.11). No próximo capítulo vamos ver que é possível operar sobre as séries de potências. Por exemplo, se soubessemos que era possível derivar a série (1.11) (como de uma soma finita se tratasse), então facilmente se obteria uma representação para a função  $\frac{1}{(1-x)^2} = \left(\frac{1}{1-x}\right)'$ . Do mesmo modo, também se obteria uma representação em série de potências para a função  $\arctg$  se soubessemos que era possível primitivar a série (1.12). No próximo capítulo iremos ver que, de facto, tais operações são possíveis de realizar.

Uma função diz-se **analítica num ponto** se for possível representá-la por uma série de potências centrada nesse ponto (num intervalo aberto centrado no ponto). Existem funções que não admitem uma representação em série de potências em nenhuma vizinhança de determinado ponto (e, portanto, não são analíticas nesse ponto). É o caso da função indicada na Observação 1.10 (na origem).

Voltemos novamente à fórmula de Taylor. Se a função  $f$  admitir derivadas (contínuas) de todas as ordens e  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_c^n f(x) = 0$  para todos os pontos  $x$

numa vizinhança do ponto  $c$ , então  $f$  admitirá um desenvolvimento em série de potências de  $x - c$ . Nesse caso, também se refere que  $f$  é *desenvolvível em série de Taylor em torno do ponto  $c$* .

Em geral, dá-se o nome de **série de Taylor** da função  $f$  no ponto  $c$  (também conhecida por **série de MacLaurin** quando  $c = 0$ ) à série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x - c)^n = f(c) + f'(c)(x - c) + \frac{f''(c)}{2!} (x - c)^2 + \dots$$

**Observação 1.10** A série de Taylor de uma dada função poderá ou não convergir<sup>4</sup> para a função que lhe deu origem. Quando o resto da fórmula de Taylor converge para zero, a função dada será a soma da respectiva série de Taylor. Existem, porém, casos em que a série converge para uma função diferente daquela que lhe deu origem. Veja-se, por exemplo, o que acontece com a função

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0. \end{cases}$$

Esta função  $f$  possui derivadas finitas de todas as ordens em  $\mathbb{R}$ , mas como  $f^{(n)}(0) = 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}_0$ , a sua série de MacLaurin converge, evidentemente, para a função nula.

**Exemplo 1.14** A série de MacLaurin da função  $\frac{1}{1-x}$  é a série de potências indicada em (1.11).

**Exemplo 1.15** Seja  $f(x) = e^x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Como  $f^{(n)}(0) = 1$  para todo  $n \in \mathbb{N}_0$ , a série de MacLaurin de  $f$  é

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

---

<sup>4</sup>Note-se que o conceito de convergência aqui referido é de natureza pontual, i.e., para cada  $x$  questiona-se se a série numérica respectiva tem soma (ou converge para)  $f(x)$ . No próximo capítulo iremos ver que é possível definir outro conceito de convergência quando lidamos com séries cujos termos são funções.

**Exemplo 1.16** A série de MacLaurin da função seno é

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

**Exemplo 1.17** A série de MacLaurin da função co-seno é

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

Uma questão interessante que podemos colocar neste momento é de saber se as séries de potências obtidas a partir da série geométrica (no início desta secção) são afinal as séries de Taylor das funções em causa. No próximo capítulo veremos que a resposta é afirmativa quando se provar a unicidade de representação de uma função em série de potências.

Outro problema muito importante que também se coloca é o de conhecer condições que garantam que a série de Taylor de uma dada função converge efetivamente para essa função. Recordando novamente a notação usada para o resto na fórmula de Taylor, temos o seguinte resultado:

**Teorema 1.6** *Sejam  $I$  um intervalo,  $c \in I$  e  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  uma função com derivadas finitas de qualquer ordem em  $I$ . Então,*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x-c)^n, \quad \forall x \in I,$$

se, e só se,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_c^n f(x) = 0.$$

**Exemplo 1.18** No caso da função exponencial  $f(x) = e^x$ , temos

$$R_0^n f(x) = \frac{e^\xi}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad x \neq 0, \quad \xi \text{ entre } 0 \text{ e } x.$$

Como  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$  tem domínio de convergência  $\mathbb{R}$ , então  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0$  [Porquê?]. Por conseguinte,  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_0^n f(x) = 0$  se  $x \neq 0$ . Sendo, evidentemente,  $R_0^n f(0) =$

0 para todo  $n$ , concluímos que a série de MacLaurin da função exponencial (do Exemplo 1.15) converge para a própria função em  $\mathbb{R}$ :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Tomando, em particular,  $x = 1$ , obtemos

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots,$$

tendo esta informação sido já avançada no início do capítulo sobre séries numéricas (apenas como curiosidade nessa altura).

O Teorema seguinte apresenta uma condição suficiente para que a soma da série de Taylor de uma função seja precisamente a própria função.

**Teorema 1.7** *Sejam  $I$ ,  $c$  e  $f$  nas mesmas condições do Teorema 1.6. Se existir  $M > 0$  tal que*

$$|f^{(n)}(x)| \leq M, \quad \forall x \in I, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0,$$

então

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x - c)^n, \quad \forall x \in I.$$

**Exemplo 1.19** Como

$$|\operatorname{sen}^{(n)}(x)| \leq 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0,$$

concluímos que a série de MacLaurin da função seno (indicada no Exemplo 1.16) converge para a própria função em  $\mathbb{R}$ :

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots, \quad x \in \mathbb{R}.$$

**Exemplo 1.20** A função co-seno também satisfaz as condições do teorema anterior, pois

$$|\cos^{(n)}(x)| \leq 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Portanto,  $\cos x$  é a soma da sua série de MacLaurin:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots, \quad x \in \mathbb{R}.$$

## 2 Sucessões e Séries de Funções

Até agora lidamos com séries numéricas (i.e., séries cujos termos são números reais) e com séries de potências. Um dos objetivos deste capítulo é aprofundar o estudo das séries por forma a estabelecermos mais propriedades que nos permitam operar com estas (recorde-se, a propósito, o que foi referido na Secção 4.3 do capítulo anterior sobre a vantagem de se poder derivar e primitivar séries de potências à semelhança do que se faz com somas finitas). Tal estudo irá ser efetuado no contexto geral das séries cujos termos são funções (definidas num certo subconjunto de  $\mathbb{R}$ ), não necessariamente do tipo potência.

Para além de termos oportunidade de lidar novamente com séries de potências, vamos também estudar algumas séries de funções trigonométricas.

### 2.1 Convergência pontual e convergência uniforme de sucessões de funções

As séries numéricas foram introduzidas a partir do conhecimento das sucessões numéricas. Do mesmo modo, vamos agora introduzir séries de funções a partir de sucessões de funções. Começemos então por tratar este último assunto e esclarecer o significado de “convergência” neste contexto.

Considere-se uma sucessão de funções reais  $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$  todas definidas num certo subconjunto  $D$  de  $\mathbb{R}$ . Tal como nas sucessões numéricas, denotamos uma tal sucessão por  $(f_n)$ , sendo que  $f_n$  representa o seu termo geral. Observe-se que, para cada  $x \in D$ ,  $(f_n(x))$  é uma sucessão de números reais.

**Exemplo 2.1** Considere-se a sucessão de funções  $(f_n)$  definida por

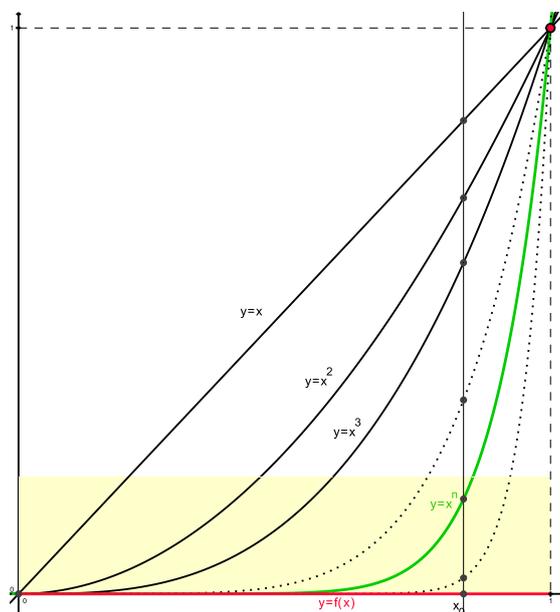
$$f_n(x) = x^n, \quad x \in [0, 1].$$

Observe-se que  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_0^n = 0$  se  $0 \leq x_0 < 1$ . Para cada  $x \in [0, 1]$ , faz sentido pensar no limite da sucessão

numérica correspondente  $(f_n(x))$ , tendo-se

$$f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in [0, 1[, \\ 1, & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

A função  $f$  é construída a partir da convergência ponto a ponto (das respectivas sucessões numéricas). Por isso mesmo, diz-se que  $f$  é o “limite pontual” da sucessão  $(f_n)$ . Geometricamente, isto significa que, para cada  $x = x_0$ , os sucessivos pontos  $(x_0, f_n(x_0))$ , de interseção dos gráficos das funções  $f_n$  com a reta vertical que passa nesse ponto, “tendem” para o ponto  $(x_0, f(x_0))$ , correspondente à interseção da mesma reta com o gráfico de  $f$  (ver figura).

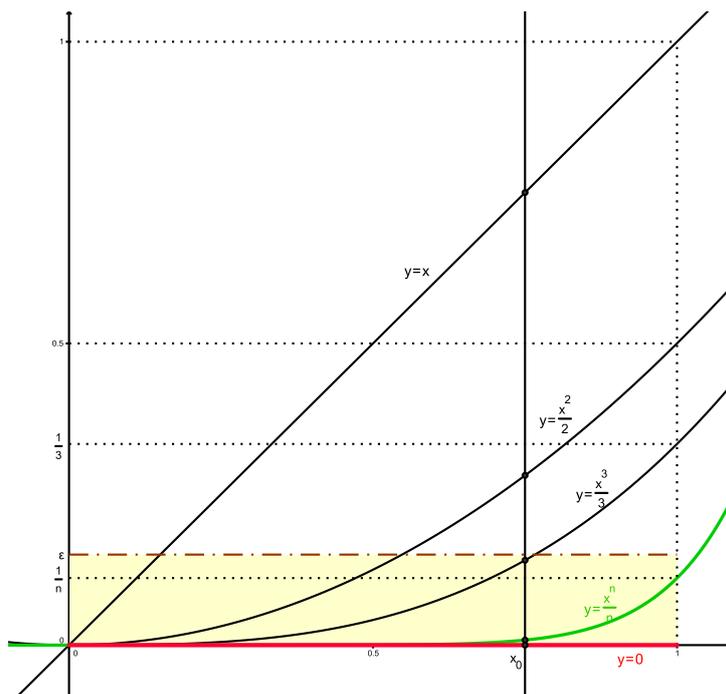


Fixemos uma qualquer faixa horizontal em torno do gráfico de  $f$  (com uma “espessura” arbitrariamente pequena). Fixando uma reta vertical  $x = x_0$ , facilmente se constata que existe uma ordem a partir da qual todos os pontos de interseção desta reta com os gráficos das funções  $f_n$  estão situados naquela faixa. Além disso, à medida que fixamos a reta vertical mais próxima da reta  $x = 1$ , observamos que a tal ordem tem de ser cada vez maior por forma a situar os pontos de intersecção na mesma faixa horizontal (tornando-se impossível encontrar uma ordem que sirva para “todas” as retas verticais  $x = x_0$  que se tomem, com  $x_0 \in [0, 1]$ ).

**Exemplo 2.2** Considere-se agora a sucessão  $(g_n)$  definida por

$$g_n(x) = \frac{x^n}{n}, \quad x \in [0, 1].$$

Para cada  $x \in [0, 1]$ , a sucessão numérica  $\left(\frac{x^n}{n}\right)$  converge para 0. Portanto, a função nula em  $[0, 1]$  é o “limite pontual” da sucessão  $(g_n)$  neste intervalo.



Repare-se que agora não se verifica a impossibilidade apontada no Exemplo 2.1. De facto, dada uma faixa horizontal (em torno do eixo das abcissas) de “espessura” arbitrariamente pequena, é sempre possível encontrar uma ordem a partir da qual, independentemente da reta vertical  $x = x_0$  que se considere, todos os pontos de interseção dessa reta com os gráficos das funções  $g_n$  se situam nessa faixa. Apesar da escolha da ordem depender, naturalmente, da “espessura” da faixa, ela é uniforme no sentido de funcionar para qualquer reta vertical  $x = x_0$  (com  $x_0 \in [0, 1]$ ). Assim, a partir de uma determinada ordem, todos os gráficos das funções  $g_n$  se situam na faixa considerada.

Na verdade, estão aqui em causa dois conceitos de convergência que passamos a registar.

**Definição 2.1 (convergência pontual)**

Sejam  $(f_n)$  uma sucessão de funções reais definidas em  $D \subseteq \mathbb{R}$  e  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ . Diz-se que  $(f_n)$  **converge pontualmente para  $f$  em  $D$**  se, para todo  $x \in D$ , temos

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

**Definição 2.2 (convergência uniforme)**

Sejam  $(f_n)$  uma sucessão de funções definidas em  $D \subseteq \mathbb{R}$  e  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ . Diz-se que  $(f_n)$  **converge uniformemente para  $f$  em  $D$**  se a sucessão numérica de termo geral

$$M_n := \sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)|$$

é um infinitésimo.

**Exemplo 2.3** Recuperando os dois exemplos anteriores, temos:

- $(f_n)$  converge pontualmente para a função  $f$  em  $[0, 1]$ . No entanto, a convergência não é uniforme neste intervalo. De facto, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$M_n = \sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [0,1]} |x^n| = 1,$$

pelo que  $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = 1 \neq 0$ .

- $(g_n)$  converge uniformemente para a função nula em  $[0, 1]$ , uma vez que

$$M_n = \sup_{x \in [0,1]} \left| \frac{x^n}{n} - 0 \right| = \sup_{x \in [0,1]} \frac{|x^n|}{n} = \frac{1}{n} \rightarrow 0 \quad \text{quando } n \rightarrow +\infty.$$

Que relação existirá entre os dois tipos de convergência indicados? Como se pode constatar no Exemplo 2.3, a convergência pontual não implica necessariamente a convergência uniforme. Mas será que esta última implica sempre a primeira? Ora, se uma sucessão  $(f_n)$  converge uniformemente para uma função  $f$  num conjunto  $D$ , então, para cada  $x \in D$ , temos

$$0 \leq |f_n(x) - f(x)| \leq \sup_{y \in D} |f_n(y) - f(y)| = M_n.$$

Como  $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = 0$  então, para cada  $x \in D$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(x) - f(x)| = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x).$$

Provou-se, assim, o seguinte resultado:

**Proposição 2.1** *Se  $(f_n)$  converge uniformemente para  $f$  num conjunto  $D$ , então  $(f_n)$  converge pontualmente para  $f$  nesse conjunto.*

**Observação 2.1** Considere-se novamente a sucessão de funções do Exemplo 2.1. Já se sabe que  $(f_n)$  converge pontualmente em  $[0, 1]$ , mas não uniformemente, para a função  $f$  dada por  $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in [0, 1[ \\ 1, & \text{se } x = 1. \end{cases}$

Uma vez que as funções  $f_n(x) = x^n$  são todas contínuas em  $[0, 1]$ , à partida poderá parecer estranho que a função limite  $f$  não seja igualmente contínua nesse intervalo ( $f$  é descontínua em  $x = 1$ ). Na verdade, esta situação não é de todo inesperada, pois a convergência pontual contempla o estudo ponto a ponto (de forma isolada) e não a função como um todo. Repare-se que esta situação não ocorre com a sucessão do Exemplo 2.2, onde a continuidade é preservada quando se passa ao limite.

**Observação 2.2** Em relação ao Exemplo 2.2, onde  $g_n(x) = \frac{x^n}{n}$  e  $g(x) = 0$  para todo  $x \in [0, 1]$ , observe-se que tanto a função limite  $g$  como todas as funções  $g_n$  são diferenciáveis em  $[0, 1]$ . Por outro lado, a sucessão  $(g'_n)$  das derivadas, definida por  $g'_n(x) = x^{n-1}$ , converge pontualmente em  $[0, 1]$  para a mesma função  $f$  do Exemplo 2.2. Repare-se, no entanto, que

$$0 = g'(1) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} g'_n(1) = 1.$$

Apesar da sucessão  $(g_n)$  convergir uniformemente em  $[0, 1]$ , o facto é que a sucessão das derivadas  $(g'_n)$  converge apenas pontualmente nesse intervalo. Em geral, é possível mostrar que a convergência uniforme da sucessão das derivadas é a condição chave para se poder permutar a derivação com a passagem ao limite.

**Observação 2.3** No que respeita à integração, nem sempre é possível “permutar o limite com o integral”. Considere-se, por exemplo,

$$h_n(x) = nx(1 - x^2)^n, \quad x \in [0, 1].$$

A sucessão  $(h_n)$  converge pontualmente para a função nula no intervalo  $[0, 1]$ . Além disso, as funções  $h_n$  são integráveis neste intervalo e

$$\int_0^1 h_n(x) dx = \int_0^1 nx(1 - x^2)^n dx = -\frac{n}{2} \frac{(1 - x^2)^{n+1}}{n+1} \Big|_0^1 = \frac{n}{2(n+1)}.$$

No entanto, temos

$$0 = \int_0^1 0 dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} h_n(x) dx \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 h_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2(n+1)} = \frac{1}{2}.$$

Atendendo às observações anteriores, vemos que a convergência pontual não assegura, em geral, que determinadas propriedades (relativas à continuidade, diferenciabilidade e integrabilidade) das funções que formam a sucessão passem para a função limite. No entanto, como mostra o teorema seguinte, a convergência uniforme é suficiente para preservar tais propriedades.

**Teorema 2.3 (Propriedades da convergência uniforme)**

Seja  $(f_n)$  uma sucessão de funções contínuas em  $[a, b]$ . Suponha-se que  $(f_n)$  converge uniformemente para  $f$  num intervalo  $[a, b]$ . Então:

(i)  $f$  é contínua em  $[a, b]$ ;

(ii)  $f$  é integrável em  $[a, b]$  e

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx;$$

(iii) Adicionalmente, se as funções  $f_n$  têm derivadas contínuas em  $[a, b]$  e a sucessão  $(f'_n)$  converge uniformemente em  $[a, b]$ , então  $f$  é diferenciável neste intervalo e

$$f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x), \quad \forall x \in [a, b].$$

**Observação 2.4** As propriedades anteriores podem funcionar como critérios para provar que uma dada sucessão não converge uniformemente. Por exemplo, a sucessão  $(h_n)$  indicada na Observação 2.3 não converge uniformemente no intervalo  $[0, 1]$ . Tal resulta do Teorema 2.3, (ii), atendendo a que  $h_n$  são funções contínuas em  $[0, 1]$ , mas  $\int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} h_n(x) dx \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 h_n(x) dx$ .

**Observação 2.5** O resultado em (iii) do teorema anterior mantém-se válido se substituirmos a hipótese da convergência uniforme de  $(f_n)$  pela mera convergência pontual (na verdade, basta até que exista um ponto  $x_0 \in [a, b]$  tal que a sucessão numérica  $(f_n(x_0))$  seja convergente).

## 2.2 Séries de funções (em geral)

Tal como nas sucessões numéricas, a convergência de uma série de funções define-se a partir da convergência da sucessão das somas parciais. Sendo esta uma sucessão de funções, naturalmente haverá que distinguir também para as séries entre a convergência pontual e a convergência uniforme .

### 2.2.1 Convergência pontual e convergência uniforme

#### Definição 2.4 (convergência pontual e convergência uniforme)

Sejam  $f_n : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e

$$S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x), \quad n \in \mathbb{N}, \quad x \in D.$$

Diz-se que a série  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  **converge pontualmente** (resp., **uniformemente**) em  $D$  se a sucessão  $(S_n)$  das somas parciais convergir pontualmente (resp., uniformemente) em  $D$ . Em caso de convergência, a função  $S$  limite da sucessão  $(S_n)$  designa-se por **soma** da série e escreve-se  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = S$ . Nesse caso, também se diz que a série  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  converge (pontual ou uniformemente) para  $S$ .

**Observação 2.6** A convergência pontual de  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  corresponde à convergência da série numérica  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  para cada  $x$ . Assim, tal como no

caso particular das séries de potências, podemos, naturalmente, definir o **domínio de convergência** da série  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  como sendo o conjunto dos pontos  $x$  para os quais a série numérica  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  é convergente.

**Exemplo 2.4** Considere-se a série  $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$  (de funções definidas em  $\mathbb{R}$ ). Como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} ne^{-nx} = \begin{cases} 0 & \text{se } x > 0 \\ +\infty & \text{se } x \leq 0, \end{cases}$$

a série diverge se  $x \in \mathbb{R}_0^-$ . Para  $x \in \mathbb{R}^+$  a série converge (basta aplicar o Critério da Raiz). Assim, o domínio de convergência da série é  $\mathbb{R}^+$ .

Uma vez que a convergência de uma série está diretamente relacionada com a convergência da respectiva sucessão das somas parciais, é de esperar que toda a discussão anterior sobre as propriedades da convergência uniforme das sucessões de funções se coloque agora ao nível das séries de funções.

**Teorema 2.5 (Propriedades da convergência uniforme)**

Seja  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  uma série de funções contínuas em  $[a, b]$ . Suponha-se que  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  converge uniformemente em  $[a, b]$  com soma  $S$ . Então:

- (i) A soma  $S$  é contínua em  $[a, b]$ ;
- (ii) A soma  $S$  é integrável em  $[a, b]$  e

$$\int_a^b S(x) dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx$$

[integração termo a termo].

- (iii) Adicionalmente, se cada  $f_n$  é de classe  $C^1$  em  $[a, b]$  e  $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n$  converge uniformemente em  $[a, b]$ , então  $S$  é diferenciável neste intervalo e

$$S'(x) = \left( \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x), \quad x \in [a, b]$$

[derivação termo a termo].

**Observação 2.7** No seguimento da Observação 2.5, importa notar que a derivação termo a termo indicada em (iii) mantém-se válida se substituirmos a hipótese da convergência uniforme da série  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  pela convergência de  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$  para algum  $x_0 \in [a, b]$ .

**Exemplo 2.5** A série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n} \quad (\text{de funções contínuas em } \mathbb{R})$$

converge para a função descontínua

$$f(x) = \begin{cases} 1+x^2 & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

(observe-se que se trata de uma série geométrica para cada  $x \neq 0$ ). Consequentemente, a convergência da série não é uniforme.

Como podemos constatar, a convergência uniforme permite preservar certas propriedades importantes como são a integração e a derivação termo a termo. Contudo, provar a convergência uniforme de uma série de funções por definição torna-se, em geral, complicado devido à dificuldade em lidar com as somas parciais. O resultado seguinte, bastante útil na prática, fornece uma condição suficiente para a convergência uniforme.

**Teorema 2.6 (Critério de Weierstrass)**

*Sejam  $(f_n)$  uma sucessão de funções definidas em  $D$  e  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  uma série numérica convergente de termos não negativos, tais que*

$$|f_n(x)| \leq a_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in D.$$

*Então a série  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  converge uniformemente em  $D$ .*

**Exemplo 2.6** Como  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  e  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$  são séries numéricas convergentes (e de termos não negativos) e

$$\left| \frac{\text{sen}(nx)}{n^3} \right| \leq \frac{1}{n^3}, \quad \left| \frac{1}{n^2 + x^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

então as séries  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(nx)}{n^3}$  e  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + x^2}$  convergem ambas uniformemente em  $\mathbb{R}$ . Por outro lado, a série das derivadas da primeira série é também uniformemente convergente [[Justifique!](#)]. Assim, podemos derivar e integrar, respetivamente, as funções soma das séries  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(nx)}{n^3}$  e  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + x^2}$  (mesmo desconhecendo tais funções), derivando e integrando termo a termo. Por exemplo,

$$\left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(nx)}{n^3} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\text{sen}(nx)}{n^3} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}.$$

$$\int_0^1 \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + x^2} \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_0^1 \frac{1}{n^2 + x^2} dx \right) = \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \arctg \frac{1}{n}.$$

**Exemplo 2.7** Já sabemos que a série  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$  é (pontualmente) convergente em  $] -1, 1[$ . Usando o Critério de Weierstrass, podemos agora garantir que esta série converge uniformemente em qualquer intervalo  $[-r, r] \subset ] -1, 1[$ . De facto,

$$|x^n| = |x|^n \leq r^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in [-r, r]$$

e  $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$  é uma série numérica de termos não negativos convergente [[Porquê?](#)].

### 2.2.2 Séries de potências (revisitado)

Recorde-se que uma série de potências é uma série de funções da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - c)^n,$$

onde  $c \in \mathbb{R}$ ,  $a_n \in \mathbb{R}$  ( $n \in \mathbb{N}_0$ ). A determinação do domínio de convergência destas séries foi amplamente discutida no capítulo anterior. Em particular, já sabemos que este domínio é sempre um intervalo de números reais. Assim, nada haverá a acrescentar em relação à convergência pontual destas séries. Em relação à convergência uniforme vale o seguinte resultado (recordar, a propósito, a situação ocorrida no Exemplo 2.7), o qual se pode provar a

partir do Critério de Weierstrass, observando que toda a série de potências converge absolutamente no intervalo de convergência.

**Teorema 2.7** *Seja  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$  uma série de potências com raio de convergência  $R \neq 0$ . Então a série converge uniformemente em qualquer subintervalo fechado e limitado do seu intervalo de convergência  $]c-R, c+R[$ .*

Uma vez que o domínio de convergência de uma série de potências pode conter os extremos do intervalo de convergência, faz sentido pensar na convergência uniforme em intervalos (fechados) que contenham tais pontos.

**Teorema 2.8 (Teorema de Abel)**

*Seja  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$  uma série de potências com raio de convergência  $R \in \mathbb{R}^+$ . Se a série converge no ponto  $x = c + R$  (resp., no ponto  $x = c - R$ ), então ela converge uniformemente em  $[c, c + R]$  (resp., em  $[c - R, c]$ ).*

**Exemplo 2.8** O domínio de convergência da série  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{5^n \sqrt{n+1}}$  (estudada no capítulo anterior) é  $[-7, 3[$ . Pelo Teorema de Abel, a série converge uniformemente nos intervalos da forma  $[-7, b]$ , com  $-7 \leq b < 3$ .

Dada uma série de potências  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$  com raio de convergência  $R \neq 0$ , prova-se sem grande dificuldade que as séries de potências

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n(x-c)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1}(x-c)^n \quad (2.1)$$

e

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x-c)^{n+1} \quad (2.2)$$

têm igualmente raio de convergência  $R$  [Verifique!]. Repare-se que a série (2.1) é a série das derivadas da série de potências  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ , enquanto que (2.2) é a série obtida por primitivação dos seus termos (tomando as primitivas que se anulam em  $c$ ).

Atendendo às propriedades da convergência uniforme, aos Teoremas 2.7 e 2.8 e ao facto de uma série de potências ser sempre uma série de funções contínuas, é possível estabelecer os seguintes resultados:

**Teorema 2.9** *Sejam  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$  uma série de potências com raio de convergência  $R \neq 0$ ,  $I = ]c-R, c+R[$  o seu intervalo de convergência e  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ . Então:*

- (i) *A função  $f$  é contínua em todo o domínio (de convergência da série).*
- (ii) *A função  $f$  é diferenciável em  $I$  e*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-c)^{n-1}, \quad \forall x \in I.$$

- (iii) *A função  $F$ , definida por*

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x-c)^{n+1},$$

*é a primitiva de  $f$  em  $I$  tal que  $F(c) = 0$ .*

- (iv) *A função  $f$  é integrável em qualquer subintervalo  $[a, b]$  do domínio de convergência e*

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b a_n (x-c)^n dx.$$

Observe-se que o teorema anterior garante, em particular, que a função soma de uma série de potências admite derivadas finitas de qualquer ordem no intervalo de convergência. De facto, considere-se

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + a_3(x-c)^3 + \dots$$

com  $x \in I = ]c-R, c+R[$  (supondo  $R \neq 0$ ). Derivando sucessivamente termo a termo em  $I$  (usando o Teorema 2.9, (ii)), temos

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-c)^{n-1} = a_1 + 2a_2(x-c) + 3a_3(x-c)^2 + 4a_4(x-c)^3 + \dots$$

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x-c)^{n-2} = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3(x-c) + 4 \cdot 3a_4(x-c)^2 + \dots$$

$$\vdots$$

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \cdots (n-k+1) a_n (x-c)^{n-k} = k! a_k + (k+1)! a_{k+1} (x-c) + \cdots$$

para qualquer  $k \in \mathbb{N}$ . Em particular, tomando  $x = c$ , obtemos

$$f^{(k)}(c) = k! a_k, \quad \forall k \in \mathbb{N}_0.$$

**Teorema 2.10 (Unicidade de representação em série de potências)**

Se

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n, \quad x \in I = ]c-R, c+R[ \quad (R \neq 0),$$

então  $f$  possui derivadas finitas de qualquer ordem em  $I$  e

$$a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}_0.$$

**Observação 2.8** A partir do Teorema 2.10 concluímos que para que uma função  $f$  possa ser representada por uma série de potências de  $x-c$  (com raio de convergência positivo), então  $f$  terá que admitir derivadas finitas de todas as ordens numa vizinhança do ponto  $c$  e a única série de potências candidata a convergir para  $f$  (nessa vizinhança) é a sua série de Taylor (nesse ponto). Em particular, fica agora claro que as séries de potências obtidas no início da Secção 4.3 (do capítulo anterior) a partir da série geométrica são precisamente as séries de Taylor das funções representadas.

**Exemplo 2.9** Uma vez que

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad -1 < x < 1,$$

temos

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \left( \frac{1}{1-x} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n, \quad -1 < x < 1.$$

Além disso, atendendo ao que foi referido na Observação 2.8, conclui-se também que  $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n$  é a série de MacLaurin da função  $\frac{1}{(1-x)^2}$ .

**Exemplo 2.10** No seguimento do exemplo anterior, se  $F$  denotar a primitiva da função  $f(x) = \frac{1}{1-x}$ , em  $] -1, 1[$ , que se anula na origem, então

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad -1 < x < 1.$$

Observe-se que

$$F(x) = -\ln(1-x) = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1},$$

pelo que

$$\ln \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, \quad -1 < x < 1.$$

Acabámos de obter uma representação da função  $\ln \frac{1}{1-x}$  numa série de potências centrada na origem (que é, de facto, a sua série de MacLaurin, atendendo à unicidade de representação).

**Exemplo 2.11** A partir do Exemplo 2.10, obtemos o desenvolvimento em série de Taylor da função logaritmo natural no ponto  $c = 1$ :

$$\ln x = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \dots + \frac{(-1)^n}{n+1}(x-1)^{n+1} + \dots, \quad 0 < x < 2.$$

Neste caso, é possível provar que a igualdade mantém-se válida para  $x = 2$ . De facto, como a série é (simplesmente) convergente neste ponto, o Teorema de Abel garante que a série de potências converge uniformemente em  $[1, 2]$  e, portanto, a função soma  $S$  é contínua neste intervalo. Assim,

$$S(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} S(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \ln x = \ln 2.$$

Provou-se então

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln 2.$$

(recorde-se que esta informação foi avançada como mera curiosidade no início do estudo das séries numéricas).

**Exemplo 2.12** Recorde-se o desenvolvimento em série de MacLaurin da função  $\frac{1}{1+x^2}$ :

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots, \quad -1 < x < 1.$$

Por primitivação termo a termo, estabelece-se o desenvolvimento em série de MacLaurin da função arctg:

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} + \cdots, \quad -1 < x < 1$$

[Verifique!]. Neste caso é possível provar que a igualdade permanece válida nos extremos do intervalo (de convergência). De facto, como a série é (simplesmente) convergente nos pontos  $x = \mp 1$ , o Teorema de Abel garante que a série de potências converge uniformemente em  $[-1, 1]$  e, portanto, a função soma  $S$  é contínua neste intervalo. Por exemplo, no ponto  $x = 1$  temos:

$$S(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} S(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{4}.$$

Logo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$$

(acabamos de verificar a informação dada no início do estudo das séries numéricas sobre a série de Gregory).

**Observação 2.9** Já sabemos que

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Derivando ambos os membros, temos

$$(e^x)' = \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

como era esperado. Já vimos também que

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{e} \quad \operatorname{cos} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Derivando termo a termo, obtemos

$$(\cos x)' = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = -\operatorname{sen} x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Analogamente também se obteria

$$(\operatorname{sen} x)' = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cos x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Recorrendo às séries confirmamos as bem conhecidas relações de derivação entre as funções seno e co-seno.

### 2.3 Séries (trigonométricas) de Fourier

Já vimos que as séries de potências (de Taylor) permitem representar muitas funções (em intervalos apropriados). No entanto, apenas as funções infinitamente diferenciáveis (i.e., admitindo derivadas de todas as ordens) podem ser representadas por este meio. Nesta secção vamos discutir a possibilidade de representar funções “pouco regulares” (mesmo descontínuas) através de séries de funções trigonométricas<sup>5</sup> da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} [a_n \cos(n\omega x) + b_n \operatorname{sen}(n\omega x)] = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega x) + b_n \operatorname{sen}(n\omega x)]$$

onde  $\omega > 0$  e  $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ , para todo  $n \in \mathbb{N}_0$ . Repare-se que uma tal série convergirá absoluta e uniformemente em  $\mathbb{R}$  sempre que as séries numéricas

---

<sup>5</sup>O uso de séries trigonométricas é muito frequente, por exemplo, no processamento de sinais. Um sinal periódico (e contínuo)  $f(t)$  pode escrever-se na forma

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \operatorname{sen}(n\omega t)],$$

sendo os coeficientes  $a_n$  e  $b_n$  bem determinados a partir do sinal  $f(t)$ . Sendo  $T$  o período do sinal, a quantidade  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  é representa a sua *frequência* (angular). Neste tipo de aplicações, a ideia é decompor um sinal numa “soma” de sinais básicos (i.e., de senos e cossenos).

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  e  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  forem absolutamente convergentes (tal resulta, essencialmente, das propriedades das séries e do Critério de Weierstrass) [Verifique!].

Por exemplo, é o caso da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{n^3} \cos(n\omega x) + \frac{(-1)^n}{n^2} \text{sen}(n\omega x) \right].$$

Observe-se também que, no caso daquela *série trigonométrica* convergir, a sua função soma é necessariamente uma função periódica de período  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ . Recorde-se, a propósito, que uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  diz-se **periódica** se existir  $T > 0$  tal que  $f(x + T) = f(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Referimo-nos ao **período** de  $f$  como sendo o menor valor de  $T$  que verifica a igualdade anterior. Por exemplo, as funções seno e co-seno habituais têm período  $2\pi$ .

**Observação 2.10** Para indicar que uma função  $f$  é *periódica de período  $T$* , podemos referir simplesmente que  $f$  é  *$T$ -periódica*.

**Observação 2.11** Toda a função  $T$ -periódica  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  pode ser “convertida” numa função  $2\pi$ -periódica  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  da forma

$$F(x) = f\left(\frac{T}{2\pi}x\right).$$

De facto, para todo  $x \in \mathbb{R}$ , temos

$$F(x + 2\pi) = f\left(\frac{T}{2\pi}(x + 2\pi)\right) = f\left(\frac{T}{2\pi}x + T\right) = f\left(\frac{T}{2\pi}x\right) = F(x).$$

Atendendo à observação anterior, no estudo que se segue vamos considerar apenas funções  $2\pi$ -periódicas.

### 2.3.1 Série e coeficientes de Fourier

Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função  $2\pi$ -periódica tal que

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \text{sen}(nx)], \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.3)$$

Se esta série trigonométrica convergir uniformemente, podemos verificar que as quantidades  $a_n$  e  $b_n$  são completamente determinadas pela função  $f$  (à

semelhança do que se passa com a série de Taylor - ver Teorema 2.10):

Integrando (2.3) no intervalo  $[-\pi, \pi]$  (notar que a integração termo a termo é possível nas hipóteses indicadas), obtemos

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 2\pi a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(nx) dx \right] = 2\pi a_0,$$

pois

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) dx = 0 \quad \text{e} \quad \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(nx) dx = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Assim,

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx. \quad (2.4)$$

Podemos também estabelecer fórmulas para os restantes  $a_m$  e  $b_m$ , observando, para tal, as “relações de ortogonalidade”<sup>6</sup>

- $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(mx) \cos(nx) dx = 0, \quad m, n \in \mathbb{N};$
- $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(mx) \operatorname{sen}(nx) dx = \begin{cases} 0 & , \quad m \neq n \\ \pi & , \quad m = n \end{cases}$
- $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx = \begin{cases} 0 & , \quad m \neq n \\ \pi & , \quad m = n. \end{cases}$

Multiplicando ambos os membros de (2.3) por  $\cos(mx)$  ( $m \in \mathbb{N}$ ) e integrando de seguida no intervalo  $[-\pi, \pi]$  chegamos à fórmula

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(mx) dx, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (2.5)$$

Se multiplicarmos ambos os membros de (2.3) por  $\operatorname{sen}(mx)$  ( $m \in \mathbb{N}$ ), uma repetição dos argumentos anteriores permite concluir que

<sup>6</sup>As quais se estabelecem imediatamente a partir das fórmulas trigonométricas

$$2 \cos(mx) \cos(nx) = \cos[(m+n)x] + \cos[(m-n)x];$$

$$2 \operatorname{sen}(mx) \operatorname{sen}(nx) = \cos[(m-n)x] - \cos[(m+n)x];$$

$$2 \operatorname{sen}(mx) \cos(nx) = \operatorname{sen}[(m+n)x] + \operatorname{sen}[(m-n)x].$$

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(mx) dx, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (2.6)$$

Se a série (2.3) convergir uniformemente, então a sua função soma é necessariamente (periódica e) contínua [Porquê?]. Contudo, observando as fórmulas (2.5) e (2.6), vemos que aqueles coeficientes podem ser construídos para uma vasta classe de funções. Ora, enquanto que a periodicidade estará sempre presente devido às características intrínsecas do seno e do cosseno, veremos que a continuidade não é essencial para a construção da série (tal como observado anteriormente).

### Definição 2.11 (Série de Fourier)

Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função  $2\pi$ -periódica e integrável em  $[-\pi, \pi]$ . Chama-se **série de Fourier**<sup>7</sup> associada à função  $f$  (ou da função  $f$ ) à série

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)], \quad (2.7)$$

onde  $a_n$  ( $n \in \mathbb{N}_0$ ) e  $b_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) são dados pelas fórmulas

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \quad e \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(nx) dx.$$

Assim definidos,  $a_n$  e  $b_n$  são os **coeficientes de Fourier** da função  $f$ .

Para exprimir que a série (2.7) está associada à função  $f$  escrevemos

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)].$$

---

<sup>7</sup>As ideias conducentes a este conceito aparecem na obra “Théorie analytique de la chaleur”, escrita pelo matemático e físico francês Jean B. J. Fourier em 1822. No entanto, a aplicação de séries trigonométricas à descrição de fenómenos periódicos já teria sido discutida antes no Séc. XVIII por Euler (no movimento de cordas vibratórias). Após a publicação do trabalho de Fourier, grandes matemáticos do Séc. XIX, como Dirichlet e Riemann, tiveram um papel fundamental no rigor dos resultados apresentados por Fourier. A série de Fourier é apenas uma das ferramentas usadas na chamada *Análise de Fourier*, uma interessante área da Matemática com importantes aplicações na Física, na própria Matemática e no processamento de sinais e de imagens, por exemplo. Existem outras formas de apresentar as séries de Fourier. Uma das mais usadas é a chamada *forma complexa*, onde se usam “exponenciais complexas” em vez de senos e cossenos.

**Observação 2.12** O aparecimento de  $\frac{a_0}{2}$  na série (2.7) em vez de  $a_0$  (como seria de esperar, depois da discussão anterior) justifica-se apenas por questões técnicas. De facto, ao escrevermos desta maneira, o coeficiente  $a_0$  em (2.7) pode ser igualmente obtido a partir da fórmula (2.5) (tomando  $m = 0$ ).

**Observação 2.13** Atendendo à periodicidade da função  $f$  (e das funções  $\cos(nx)$  e  $\sin(nx)$ ), os coeficientes de Fourier no intervalo  $[-\pi, \pi]$  coincidem com os coeficientes obtidos em qualquer intervalo de amplitude  $2\pi$ , *i.e.*, da forma  $[a, a + 2\pi]$  com  $a \in \mathbb{R}$ . De facto,

$$\int_a^{a+2\pi} f(x) \cos(mx) dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(mx) dx;$$

$$\int_a^{a+2\pi} f(x) \sin(mx) dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(mx) dx.$$

**Observação 2.14** À semelhança do que acontece com as séries de Taylor, a série de Fourier nem sempre é convergente e mesmo quando converge a sua soma (que será sempre uma função  $2\pi$ -periódica) pode não coincidir com a função que lhe deu origem.

**Observação 2.15** As séries de Fourier permitem lidar com funções meramente integráveis, ao contrário das séries de Taylor onde é exigido que as funções sejam infinitamente diferenciáveis. Como as primeiras funcionam sob hipóteses menos restritivas, é natural que levantem problemas de convergência mais delicados do que as segundas.

Nalguns casos, o cálculo dos coeficientes de Fourier poderá ser facilitado se recordarmos alguns resultados que relacionam a paridade<sup>8</sup> de uma função com o valor do seu integral em intervalos simétricos, nomeadamente:

$$\text{Se } f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R} \text{ é ímpar, então } \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0;$$

---

<sup>8</sup>Uma função  $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$  diz-se **ímpar** (resp., **par**) se  $f(-x) = -f(x)$  (resp.,  $f(-x) = f(x)$ ) para todo  $x \in [-a, a]$ . É fácil de verificar que o produto de duas funções com a mesma paridade é uma função par, enquanto que o produto de duas funções com paridades distintas é uma função ímpar.

Se  $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  é par, então  $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 2 \int_0^{\pi} f(x) dx$ .

**Exemplo 2.13** Seja  $f$  a função  $2\pi$ -periódica definida em  $[-\pi, \pi]$  por  $f(x) = |x|$ . Os coeficientes de Fourier são

$$b_n = 0 \quad (n \in \mathbb{N}) \quad \text{e} \quad a_n = \begin{cases} \pi & , \quad n = 0 \\ 0 & , \quad n \text{ par} \\ -\frac{4}{\pi n^2} & , \quad n \text{ ímpar.} \end{cases}$$

A série de Fourier de  $f$  é

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \cos x - \frac{4 \cos(3x)}{\pi 3^2} - \frac{4 \cos(5x)}{\pi 5^2} - \dots$$

e podemos escrever (justifique a igualdade)

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ -\frac{4 \cos[(2n-1)x]}{\pi (2n-1)^2} \right] = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos[(2n-1)x]}{(2n-1)^2}.$$

**Exemplo 2.14** Considere-se a função  $2\pi$ -periódica  $g$  dada por

$$g(x) = \begin{cases} 0 & , \quad -\pi \leq x < 0 \\ \pi & , \quad 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

Neste caso, os coeficientes de Fourier são dados por

$$a_0 = \pi, \quad a_n = 0 \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \quad \text{e} \quad b_n = \begin{cases} \frac{2}{n} & , \quad n \text{ ímpar} \\ 0 & , \quad n \text{ par.} \end{cases}$$

A série de Fourier de  $g$  fica então

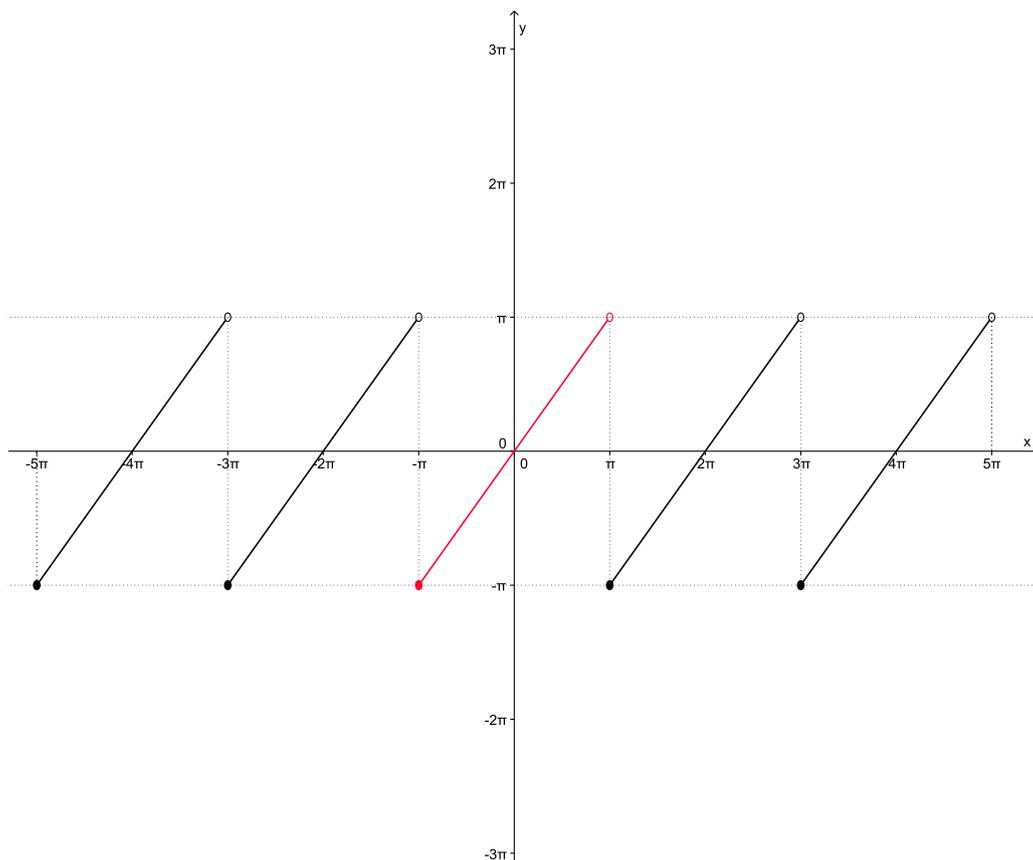
$$\frac{\pi}{2} + 2 \operatorname{sen} x + \frac{2}{3} \operatorname{sen}(3x) + \frac{2}{5} \operatorname{sen}(5x) + \dots$$

e podemos escrever

$$g(x) \sim \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2n-1} \operatorname{sen}[(2n-1)x], \quad x \in \mathbb{R}.$$

Atendendo à periodicidade das funções que estamos a considerar, é suficiente conhecer o seu comportamento em intervalos de amplitude  $2\pi$  (tipicamente em  $[-\pi, \pi]$ ). Aliás, muitas vezes, conhecemos a função apenas num certo intervalo com essa amplitude, sendo importante “estendê-la”, de forma periódica, a todo o  $\mathbb{R}$ . Observe-se que toda a função definida num intervalo da forma  $[a, a + 2\pi[$  ( $a \in \mathbb{R}$ ) pode ser estendida de modo único a  $\mathbb{R}$ , por forma a obter-se uma função  $2\pi$ -periódica. O mesmo é válido para funções inicialmente definidas num intervalo da forma  $]a, a + 2\pi]$ .

**Exemplo 2.15** A figura seguinte representa graficamente a extensão  $2\pi$ -periódica da função  $f$ , definida em  $[-\pi, \pi[$  por  $f(x) = x$ .



**Observação 2.16** Como uma função  $f$  definida em  $[-\pi, \pi[$  (ou em  $] -\pi, \pi]$ ) admite uma única extensão  $2\pi$ -periódica consideramos a série de Fourier de  $f$  (também integrável) como sendo a série de Fourier dessa sua extensão, à

qual podemos continuar a chamar  $f$  para simplificar a escrita. No caso de  $f$  estar definida em  $[-\pi, \pi]$ , a sua série de Fourier será a série de Fourier das restrições  $f|_{[-\pi, \pi[}$  ou  $f|_{]-\pi, \pi]}$  (a escolha é indiferente, pois as respetivas extensões periódicas têm ambas a mesma série de Fourier).

Embora na construção da série de Fourier apareçam combinações de senos e cossenos em geral, o facto é que nas séries indicadas nos Exemplos 2.13 e 2.14 apenas aparecem funções de um destes tipos. No Exemplo 2.13 tal deve-se à paridade da função envolvida (note-se que  $f$  é par). De facto, recordando a influência da paridade de uma função no cálculo de integrais em intervalos simétricos (em relação à origem), verifica-se o seguinte:

- Se  $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  é par, a sua série de Fourier é uma *série de cossenos*,

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx),$$

onde

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

- Se  $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  é ímpar, a sua série de Fourier é uma *série de senos*,

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(nx),$$

onde

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(nx) dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Em certas situações práticas poderá ser útil o facto da série de Fourier de uma função conter apenas senos ou cossenos. Por exemplo, na resolução de certas equações diferenciais necessitamos por vezes de “estender” ao intervalo  $[-\pi, \pi]$  uma função inicialmente definida apenas em  $[0, \pi]$ , por forma a tirar-se partido da simetria.

Depois da discussão anterior, fica claro que se obterá uma série de senos ou uma série de cossenos para uma função integrável  $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ , consoante

se considera, respetivamente, a série de Fourier da *extensão ímpar* ( $f_i$ ) ou a série de Fourier da *extensão par* ( $f_p$ ) de  $f$ . Notar que

$$f_i(x) = -f(-x), \quad \text{se } x \in [-\pi, 0[$$

e

$$f_p(x) = f(-x), \quad \text{se } x \in [-\pi, 0]$$

(eventualmente redefinindo  $f$  na origem no caso da extensão ímpar, embora tal seja irrelevante para o que se pretende).

### 2.3.2 Convergência da série de Fourier

Sabendo já como construir a série de Fourier de um função (nas condições indicadas), importa agora averiguar se essa série converge e, em caso afirmativo, se a sua soma coincide com a função que lhe deu origem.

Comecemos por observar o que se passa com a série de Fourier da função  $g$  do Exemplo 2.14. Seja  $S$  a sua função soma:

$$S(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2n-1} \operatorname{sen}((2n-1)x).$$

O ponto  $x = 0$  pertence ao domínio de convergência da série. Contudo,

$$S(0) = \frac{\pi}{2} \neq \pi = g(0),$$

pelo que a série de Fourier nem sempre converge para a própria função. Antes de esclarecermos esta questão da convergência importa registar o conceito de *função seccionalmente contínua*<sup>9</sup>. Dentro da classe de tais funções interessantes distinguir aquelas cuja derivada é igualmente uma função seccionalmente contínua. Uma tal função diz-se **seccionalmente diferenciável**.

<sup>9</sup>Uma função  $f$  diz-se *seccionalmente contínua* em  $[a, b]$  se existir uma partição  $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) de  $[a, b]$  tal que  $f$  é contínua em cada subintervalo aberto  $]a_{j-1}, a_j[$  ( $j = 1, \dots, n$ ) e existirem e forem finitos os limites laterais

$$f(a_{j-1}^+) := \lim_{x \rightarrow a_{j-1}^+} f(x) \quad e \quad f(a_j^-) := \lim_{x \rightarrow a_j^-} f(x).$$

A função  $f$  diz-se *seccionalmente contínua* em  $\mathbb{R}$  se for seccionalmente contínua em todo o intervalo  $[a, b]$  de  $\mathbb{R}$ . Note-se que uma função seccionalmente contínua em  $[a, b]$

**Teorema 2.12 (Teorema de Dirichlet)**

Sejam  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função  $2\pi$ -periódica e seccionalmente diferenciável (em  $\mathbb{R}$ ) e  $c \in \mathbb{R}$ . Então a série de Fourier de  $f$  converge no ponto  $c$  para  $\frac{f(c^+) + f(c^-)}{2}$  (a média dos limites laterais de  $f$  no ponto  $c$ ).

**Observação 2.17** Nas condições do teorema anterior, a série de Fourier de  $f$  converge (pontualmente) para a função

$$S(x) = \begin{cases} f(x) & , \text{ se } x \text{ é ponto de continuidade de } f; \\ \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} & , \text{ se } x \text{ não é ponto de continuidade de } f. \end{cases}$$

Repare-se que a função  $S$  é sempre uma função  $2\pi$ -periódica, pelo que bastará conhecer  $S$  num intervalo de amplitude  $2\pi$ .

**Exemplo 2.16** Seja  $f(x) = |x|$ ,  $x \in [-\pi, \pi]$ ,  $2\pi$ -periódica (a função do Exemplo 2.13). Como  $f$  é seccionalmente diferenciável, a sua série de Fourier é convergente em  $\mathbb{R}$ . Além disso, como  $f$  é contínua, temos

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos[(2n-1)x]}{(2n-1)^2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

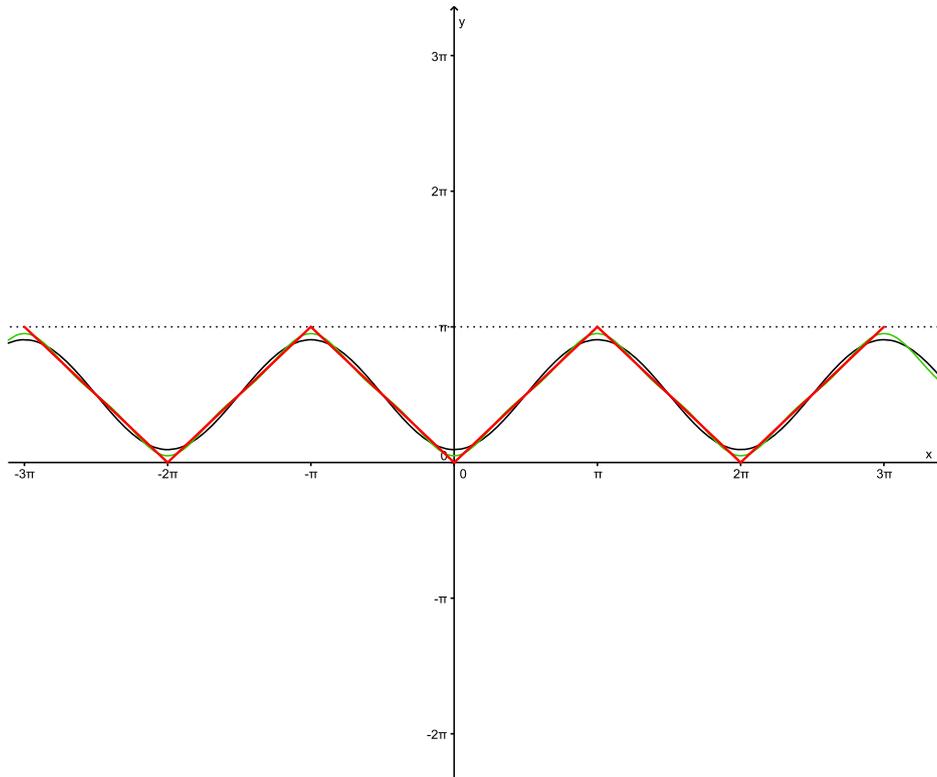
mostrando, neste caso, que podemos substituir o símbolo “ $\sim$ ” pela igualdade.

Neste caso, a convergência é mesmo uniforme [Porquê?].

Na figura abaixo estão representadas a função  $f$  (a vermelho) e as duas primeiras aproximações (*i.e.*, as somas parciais)  $S_1$  e  $S_2$ :

$$\begin{aligned} S_1(x) &= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \cos x && \text{(a preto)} \\ S_2(x) &= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \cos x - \frac{4 \cos(3x)}{3^2} && \text{(a verde)} \end{aligned}$$

pode, eventualmente, não estar definida num conjunto finito de pontos deste intervalo. Importa registar que toda a função contínua é seccionalmente contínua. Além disso, qualquer função seccionalmente contínua num intervalo  $[a, b]$  é integrável (à Riemann) nesse intervalo.



**Exemplo 2.17** A função  $2\pi$ -periódica

$$g(x) = \begin{cases} 0 & , \quad -\pi \leq x < 0 \\ \pi & , \quad 0 \leq x < \pi, \end{cases}$$

(do Exemplo 2.14) é seccionalmente diferenciável, logo a respetiva série de Fourier é convergente em  $\mathbb{R}$ . Seja

$$S(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2n-1} \text{sen}[(2n-1)x], \quad x \in \mathbb{R}.$$

Observe-se que  $S$  coincide com  $g$  em  $\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$  visto que  $g$  é contínua neste conjunto. Nos pontos da forma  $c = k\pi$ , temos

$$g(c^+) = \begin{cases} \pi & , \quad k = 0, \mp 2, \mp 4, \dots \\ 0 & , \quad k = \mp 1, \mp 3, \mp 5, \dots \end{cases}$$

e

$$g(c^-) = \begin{cases} 0 & , \quad k = 0, \mp 2, \mp 4, \dots \\ \pi & , \quad k = \mp 1, \mp 3, \mp 5, \dots \end{cases}$$

Assim,

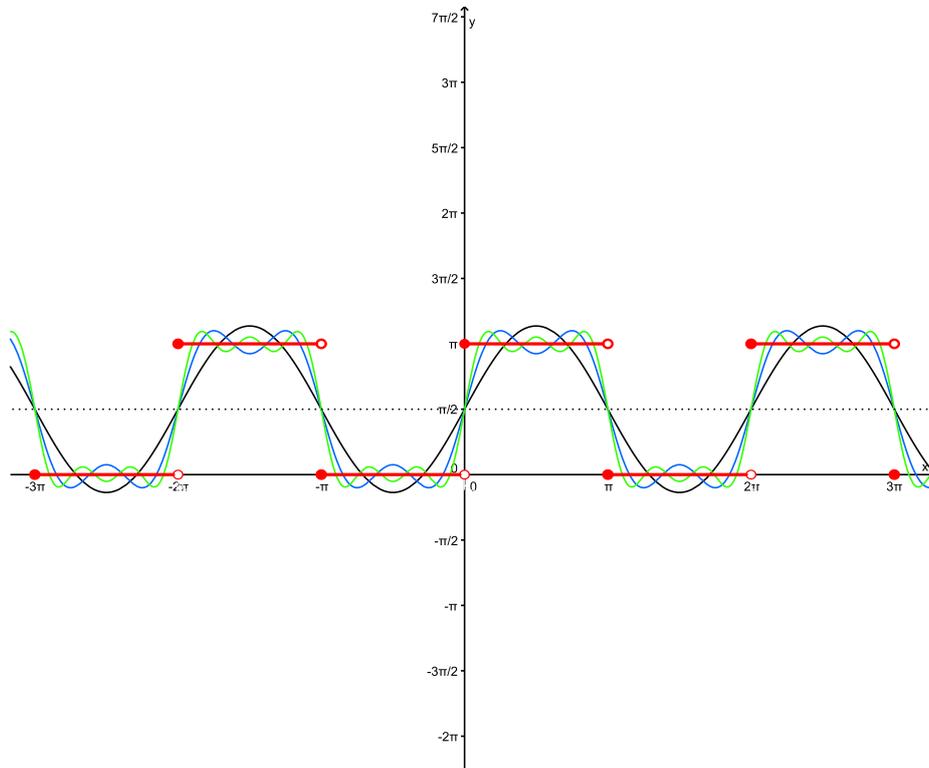
$$S(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & , \quad x = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}), \\ g(x) & , \quad x \neq k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}). \end{cases}$$

Na figura abaixo estão representadas a função  $g$  (a vermelho) no intervalo  $[-3\pi, 3\pi]$ , bem como as três primeiras aproximações (somadas parciais) da série de Fourier:

$$S_1(x) = \frac{\pi}{2} + 2 \operatorname{sen} x \quad (\text{a preto})$$

$$S_2(x) = \frac{\pi}{2} + 2 \operatorname{sen} x + \frac{2}{3} \operatorname{sen}(3x) \quad (\text{a azul})$$

$$S_3(x) = \frac{\pi}{2} + 2 \operatorname{sen} x + \frac{2}{3} \operatorname{sen}(3x) + \frac{2}{5} \operatorname{sen}(5x) \quad (\text{a verde}).$$



### 2.3.3 Aplicação ao cálculo da soma de séries numéricas

As séries de Fourier permitem calcular com relativa facilidade a soma de algumas séries numéricas (cujo estudo se torna inviável através das somas parciais). Por exemplo, vamos determinar a soma das séries de Euler que

haviam sido indicadas (como curiosidade) no início do capítulo das séries numéricas.

Já sabemos que

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos[(2n-1)x]}{(2n-1)^2}, \quad x \in [-\pi, \pi]$$

(rever o Exemplo 2.16). Em particular, para  $x = 0$  temos

$$0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2},$$

logo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Seja agora  $s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  (já se sabe que esta série converge). Como

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \dots = \frac{s}{4} \quad \text{e} \quad 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8},$$

então

$$s = \frac{s}{4} + \frac{\pi^2}{8}$$

e, portanto,

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Podemos também (re)calcular a soma da *série de Gregory* (cf. Exemplo 2.12). Uma vez que

$$\frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2n-1} \operatorname{sen}[(2n-1)x] = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & , \quad x = 0, \pi \\ \pi & , \quad 0 < x < \pi \end{cases}$$

(recordar o Exemplo 2.17), tomando  $x = \frac{\pi}{2}$  obtemos

$$\pi = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2n-1} \operatorname{sen}[(2n-1)\pi/2].$$

Como  $\operatorname{sen}[(2n-1)\pi/2] = (-1)^{n+1}$ , concluímos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}.$$

333

### **3 Extremos de Funções Reais de Várias Variáveis Reais**

(ver conjunto de slides em separado).

## 4 Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs)

### 4.1 Introdução

Neste capítulo vamos tratar de um dos tópicos da Matemática mais usados na resolução de certos problemas de engenharia e de ciências (incluindo as ciências sociais). Existem muitos problemas que, quando formulados em termos matemáticos, requerem a determinação de uma função que satisfaça uma dada relação (ou equação) envolvendo uma ou mais derivadas dessa função desconhecida (e, eventualmente, a própria função, bem como alguns dados iniciais). Indicamos a seguir alguns problemas de diferentes áreas cuja modelação matemática conduz a este tipo de equações (ditas “equações diferenciais”).

- A taxa de variação da temperatura de um objecto é proporcional à diferença entre a sua temperatura e a temperatura do meio ambiente (*Lei do Arrefecimento de Newton*):

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_m) \quad (4.1)$$

onde  $T$  é a temperatura do objecto (em função do tempo  $t$ ),  $T_m$  é a temperatura do meio ambiente e  $k$  é uma constante positiva.

- Um objecto de massa  $m$  é colocado na extremidade de uma mola vertical. Esta é esticada (ou comprimida)  $x$  unidades a partir da sua posição (inicial) de equilíbrio. A *Lei de Hooke* diz que a força (elástica) exercida pela mola é proporcional ao seu deslocamento  $x = x(t)$ . Por outro lado, como a força é igual à massa vezes a aceleração (*segunda Lei de Newton*), se ignorarmos forças externas (como a resistência do ar, por exemplo), então o *movimento harmónico* da mola é modelado pela equação

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx \quad (4.2)$$

onde  $k > 0$  (*constante de mola*).

- Em modelos de crescimento populacionais (simplificados) é razoável assumir-se que a taxa de crescimento relativo de uma população  $P$  permanece constante no tempo (pelo menos em períodos curtos),

$$\frac{1}{P} \frac{dP}{dt} = k \quad (k > 0),$$

ou seja, a população cresce (pelo menos inicialmente) de forma proporcional ao seu tamanho:

$$\frac{dP}{dt} = kP. \tag{4.3}$$

Esta equação modela o chamado *crescimento exponencial*: se  $P_0$  denotar o tamanho inicial, então

$$P(t) = P_0 e^{kt}. \tag{4.4}$$

No entanto, devido a vários fatores, em geral uma população não deverá crescer exponencialmente de forma continuada ao longo do tempo. Será, portanto, mais razoável admitir que a taxa de crescimento diminui quando  $P$  aumenta, tornando-se mesmo negativa quando  $P$  ultrapassa a chamada “capacidade de suporte” ( $K$ ). Um dos modelos de crescimento habitualmente considerado é o chamado *modelo logístico*, no qual a população cresce até um certo limite e tende a estabilizar a partir desse valor. Tal modelo é traduzido pela equação diferencial (logística)

$$\frac{dP}{dt} = kP \left( 1 - \frac{P}{K} \right). \tag{4.5}$$

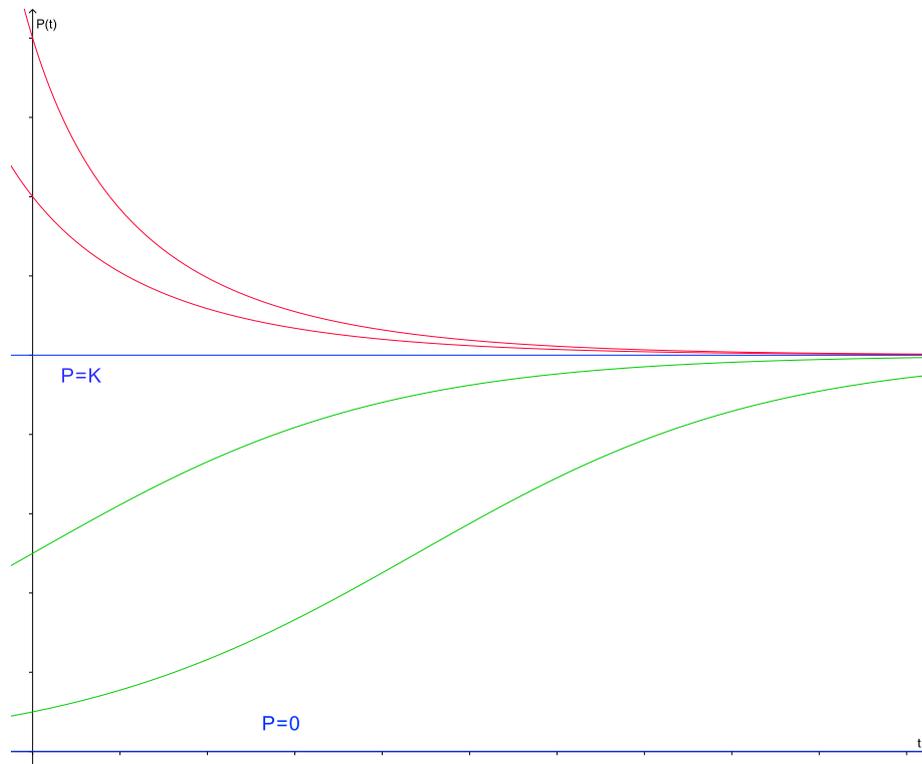
Neste caso, a lei de crescimento é dada por

$$P(t) = \frac{K}{1 + Ce^{-kt}}, \quad t \geq 0, \tag{4.6}$$

com  $C = \frac{K-P_0}{P_0}$ , facto que será confirmado mais adiante quando discutirmos técnicas de resolução para este tipo de equações.

A figura abaixo ajuda a interpretar este modelo. Repare-se, em particular, que as funções constantes  $P = 0$  e  $P = K$  satisfazem a equação (4.5) [Porquê?]. Isto traduz o facto expectável de a população permanecer inalterada se ela for nula ou então estiver na capacidade de

suporte. Em todo o caso podemos observar que a população tende a aproximar-se naturalmente do valor  $K$ .



- No investimento de um dado montante inicial  $M_0$ , com uma taxa de juro anual  $r$  (por cento), passados  $t$  anos o montante será  $M_0(1 + r)^t$ . No entanto, podemos pensar em juros compostos considerando  $n$  períodos durante o ano. Uma vez que a taxa em cada período é  $\frac{r}{n}$ , o montante no final de  $nt$  períodos (em  $t$  anos) será  $M_0 \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$ . Após  $t$  anos, o montante depende do número  $n$  de períodos em que os juros são compostos. Na verdade, esse montante aumenta à medida que se consideram juros com composição anual ( $n = 1$ ), semestral ( $n = 2$ ), mensal ( $n = 12$ ), etc.

[Simule com um investimento inicial de 100 euros a 3 anos!].

Observe-se que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} M_0 \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} = \lim_{n \rightarrow +\infty} M_0 \left[ \left(1 + \frac{1}{n/r}\right)^{n/r} \right]^{rt} = M_0 e^{rt}.$$

Assim, com uma composição contínua de juros a uma taxa  $r$ , passados  $t$  anos o montante  $M$  é dado por

$$M(t) = M_0 e^{rt}. \quad (4.7)$$

Este processo de cálculo de juros é modelado pela equação

$$\frac{dM}{dt} = rM(t), \quad (4.8)$$

traduzindo o facto de a taxa de aumento do investimento ser proporcional ao próprio investimento, perante uma composição contínua de juros.

- Em certas reacções químicas dois reagentes  $A$  e  $B$  formam um certo composto  $C$  ( $A + B \rightarrow C$ ), com uma taxa de reacção proporcional ao produto das concentrações de  $A$  e de  $B$ , i.e.,  $\frac{d[C]}{dt} = \kappa[A][B]$ . A concentração do composto  $C$  pode ser modelada através da equação

$$\frac{dy}{dt} = \kappa(a - y)(b - y) \quad (4.9)$$

onde  $\kappa$  é constante,  $y = [C]$  e  $a$  e  $b$  representam as concentrações iniciais de  $A$  e  $B$ , respetivamente.

- Uma das equações básicas usadas em circuitos elétricos é

$$L \frac{dI}{dt} + RI = E(t) \quad (4.10)$$

(*lei de Kirchhoff*) onde  $L$  e  $R$  são constantes (representando a indutância e a resistência, respetivamente),  $I(t)$  a intensidade da corrente (no tempo  $t$ ) e  $E(t)$  a voltagem.

## 4.2 Definições e terminologia

### Definição 4.1 (equação diferencial ordinária)

Chama-se **equação diferencial ordinária**<sup>10</sup> (EDO) de ordem  $n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ), a uma equação do tipo

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (4.11)$$

onde  $y$  é função (real) de  $x$ .

Diz-se que uma EDO está na forma normal quando aparece explicitada em relação à derivada de maior ordem, i.e.,

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}). \quad (4.12)$$

**Observação 4.1** Na EDO (4.11),  $x$  é a variável independente, enquanto que  $y$  é a variável dependente ( $y = y(x)$ ). A ordem de uma EDO é a maior ordem da derivada da função desconhecida. Como é habitual,  $y^{(n)}$  denota a derivada de ordem  $n$  da função  $y$ . Em alternativa, podemos usar a notação  $\frac{d^n y}{dx^n}$  e (re)escrever a EDO (4.11) na forma

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0. \quad (4.13)$$

Como vamos estudar apenas equações diferenciais com uma única variável independente, daqui para diante iremos omitir o termo “ordinária” para simplificar a escrita.

**Exemplo 4.1** As equações diferenciais (4.1), (4.3), (4.5), (4.8), (4.9) e (4.10) são todas de primeira ordem. A equação diferencial

$$(y')^2 + y = \text{sen } x$$

é igualmente de primeira ordem ( $x$  é a variável independente e  $y$  é a variável dependente).

---

<sup>10</sup>A designação “ordinária” serve para distinguir estas equações das chamadas equações diferenciais com “derivadas parciais”, onde a variável dependente é função de duas ou mais variáveis independentes. Os alunos que vão frequentar Cálculo III terão oportunidade de estudar alguns tipos destas equações.

**Exemplo 4.2** As equações diferenciais (4.2) e

$$y'' - y' + x^3 - 1 = 0$$

são ambas de segunda ordem. Repare-se nos diferentes papéis desempenhados pela variável  $x$  nas duas equações!

**Definição 4.2 (solução de uma EDO)**

Chama-se **solução da equação diferencial** (4.11), num intervalo  $I^{11}$ , a toda a função  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  com derivadas finitas até à ordem  $n$  e tal que

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) = 0, \quad \forall x \in I.$$

**Exemplo 4.3** As funções  $\varphi_1(x) = \sin x$  e  $\varphi_2(x) = \cos x - \sin x$  são duas soluções (em  $\mathbb{R}$ ) da equação diferencial  $y'' + y = 0$ .

**Observação 4.2** No Exemplo 4.3 temos duas soluções explícitas da equação indicada. No entanto, em geral, uma EDO poderá ter soluções na forma implícita. É o caso da relação  $ye^y = x$ , a qual define implicitamente<sup>12</sup> uma solução da equação diferencial

$$y' \left(1 - \ln \frac{y}{x}\right) = \frac{y}{x}, \quad x > 0.$$

Resolver (ou integrar) uma equação diferencial significa determinar o conjunto das suas soluções. Usando conhecimentos de integração de Cálculo I podemos determinar as soluções de algumas equações diferenciais simples, como é caso da equação (escrita na forma normal)

$$y' = f(x)$$

---

<sup>11</sup>Na prática, muitas vezes não fazemos referência ao intervalo onde estamos a considerar a equação, desde que tal não seja realmente usado e daí não surjam ambiguidades.

<sup>12</sup>É possível mostrar que  $ye^y = x$  define, de facto,  $y$  como função de  $x$  para  $x, y > 0$  e que tal função  $y = y(x)$  é mesmo diferenciável. Os alunos que irão frequentar Cálculo III terão oportunidade de estudar funções definidas implicitamente.

(supondo  $f$  contínua). O conjunto de soluções desta equação, num intervalo  $I$ , é a família de todas as primitivas da função  $f$  nesse intervalo:

$$y = \int f(x) dx = G(x) + C, \quad x \in I,$$

onde  $G$  denota uma primitiva de  $f$  e  $C$  representa uma constante real arbitrária. Em geral, as equações diferenciais da forma

$$y^{(n)} = f(x)$$

resolvem-se através de  $n$  integrações sucessivas. Este processo conduz, naturalmente, a uma família de soluções envolvendo  $n$  constantes reais arbitrárias (em número igual à ordem da equação).

Em geral, resolver (ou integrar) uma equação diferencial de ordem  $n$  consiste em determinar uma família de soluções que dependa de  $n$  parâmetros reais arbitrários. A uma tal família, obtida através de técnicas de integração adequadas, chamamos **integral geral** da equação diferencial. Dado um integral geral, uma sua **solução particular** (ou *integral particular*) é uma solução que se obtém do primeiro por concretização dos parâmetros. Poderão, no entanto, existir soluções que não se conseguem obter desta forma. Uma tal solução designa-se por **solução singular** (em relação ao integral geral considerado). Ao conjunto de todas as soluções de uma equação diferencial chamamos **solução geral**.

**Exemplo 4.4** A solução geral da EDO de segunda ordem

$$y'' + x = 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

é dada por

$$y = -\frac{x^3}{6} + C_1x + C_2, \quad \text{com } C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

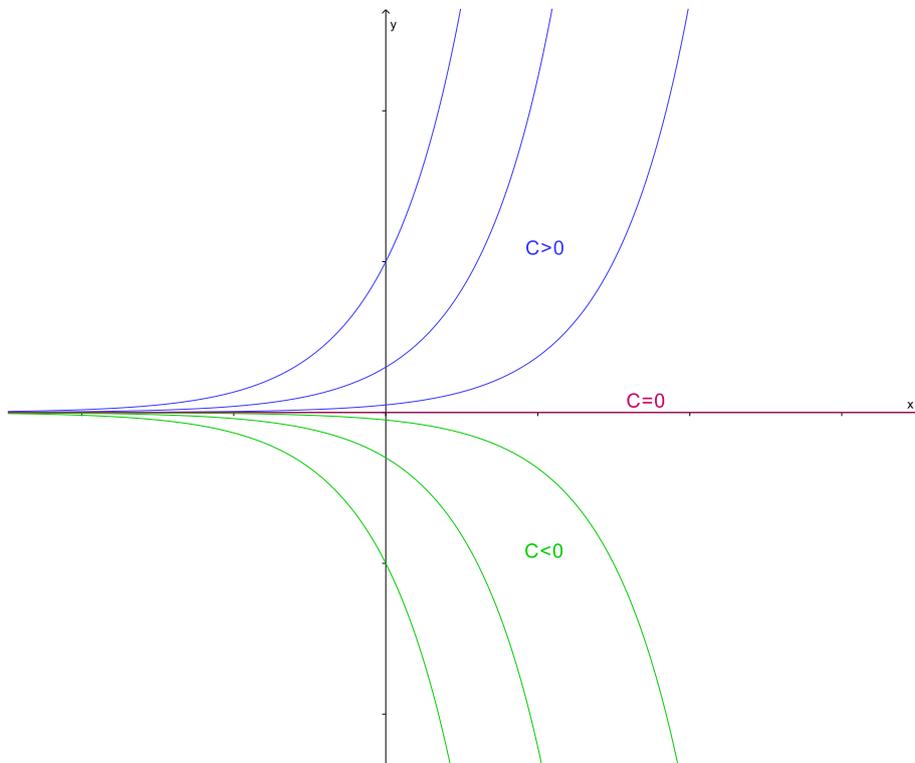
**Exemplo 4.5** Considere-se agora a equação diferencial (em  $\mathbb{R}$ )

$$y' - 2y = 0. \tag{4.14}$$

Se  $\phi$  é solução da equação, então a função  $\psi(x) = \phi(x) e^{-2x}$  tem derivada nula (verifique!). Portanto,  $\psi$  é constante (em  $\mathbb{R}$ ) e, por conseguinte,  $\phi$  é da forma  $\phi(x) = C e^{2x}$  (com  $C$  constante). Reciprocamente, verificamos que as funções do tipo  $C e^{2x}$  (novamente com  $C$  constante) constituem soluções da EDO dada. Assim, a solução geral da equação (4.14) é

$$y = C e^{2x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Do ponto de vista geométrico, o integral geral representa uma família de “curvas integrais”:



**Observação 4.3** Note-se que a técnica de resolução discutida no Exemplo 4.5 pode ser aplicada mais geralmente a equações diferenciais da forma  $y' = ky$  (com  $k$  constante), sendo a sua solução geral dada por  $y = C e^{kx}$ , onde  $C$  é uma constante real arbitrária. Em particular, fica agora claro o porquê de (4.4) e (4.7) constituírem as soluções das equações (4.3) e (4.8), respetivamente (sujeitas às respetivas condições  $P(0) = P_0$  e  $M(0) = M_0$ ).

**Exemplo 4.6** A equação diferencial (4.2) pode ser escrita na forma:

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = 0, \quad \omega^2 = k/m.$$

Mais tarde veremos que qualquer solução desta equação é do tipo

$$x(t) = C_1 \operatorname{sen}(\omega t) + C_2 \operatorname{cos}(\omega t), \quad \text{com } C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Atendendo ao contexto do problema, o aparecimento das funções seno e cosseno na solução geral da equação não é surpreendente, uma vez que a mola tem um comportamento oscilatório em torno do seu ponto de equilíbrio.

Mais adiante vamos ver como determinar um integral geral (ou mesmo a solução geral) de alguns tipos de equações diferenciais. Não iremos aprofundar o estudo de soluções singulares<sup>13</sup>.

**Exemplo 4.7** Considere-se a EDO de primeira ordem (em  $\mathbb{R}$ )

$$(y')^2 - 4y = 0.$$

Um integral geral desta equação é dado por  $y = (x + C)^2$ , onde  $C$  é uma constante real arbitrária.

A função definida por  $y = x^2$  é uma solução particular daquela equação, enquanto que  $y = 0$  é uma solução singular. [Porquê?]

**Exemplo 4.8** As famílias de funções  $y = x + C$  e  $y = -x + C$  ( $C \in \mathbb{R}$ ) constituem dois integrais gerais para a EDO de primeira ordem  $(y')^2 = 1$ . Repare-se que cada solução particular de um é uma solução singular relativamente ao outro. [Verifique!]

Em muitas aplicações mais importante do que determinar um integral geral para a equação diferencial envolvida é encontrar a(s) solução(ões) particular(es) que satisfaz(em) determinadas condições previamente fixadas.

---

<sup>13</sup>Do ponto de vista geométrico, uma tal solução poderá corresponder a uma curva tangente a todas as curvas do integral geral (veja-se o caso da curva  $y = 0$  no Exemplo 4.7).

**Definição 4.3 (Problema de valores iniciais)**

Chama-se **problema de valores iniciais (PVI)** (ou **problema de Cauchy**) a todo o problema que consiste em encontrar a solução (ou soluções) de uma dada equação diferencial satisfazendo certas condições (ditas condições iniciais) num mesmo ponto:

$$\begin{cases} F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \\ y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}. \end{cases} \quad (4.15)$$

Assim, resolver um PVI do tipo (4.15) significa determinar a(s) solução(ões) da equação diferencial de ordem  $n$  envolvida que satisfaz(em) as  $n$  condições iniciais no ponto  $x_0$  (notar que  $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$  são números reais dados).

**Definição 4.4 (Problema de valores na fronteira)**

Chama-se **problema de valores na fronteira** (ou simplesmente **problema de fronteira**) a todo o problema que consista em encontrar a solução (ou soluções) de uma dada equação diferencial satisfazendo condições em dois ou mais pontos.

**Exemplo 4.9** No seguimento do Exemplo 4.4, a solução do PVI

$$\begin{cases} y'' + x = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

é  $y = -\frac{x^3}{6} + 1$  [Verifique!].

O problema de fronteira

$$\begin{cases} y'' + x = 0 \\ y(0) + y'(1) = -\frac{1}{3} \\ y(1) + y'(0) = 0 \end{cases}$$

tem também uma única solução [Determine-a!]. Repare-se que neste último problema as condições de fronteira dizem respeito aos pontos  $x = 0$  e  $x = 1$  (os quais constituem efetivamente a fronteira do intervalo  $[0, 1]$ ).

**Exemplo 4.10** Retomando o Exemplo 4.7 vemos que  $y = x^2$  e  $y = 0$  são duas soluções do problema de Cauchy

$$\begin{cases} (y')^2 - 4y = 0 \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

**Exemplo 4.11** O PVI

$$\begin{cases} |y'| + |y| = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

não tem solução, uma vez que a equação diferencial  $|y'| + |y| = 0$  tem apenas a solução  $y = 0$ .

Os exemplos anteriores sugerem, por um lado, que nem todo o PVI admite solução e, por outro, que a existir solução esta poderá não ser única. Do ponto de vista de aplicações, é importante conhecer condições que garantam a existência e unicidade de solução. É possível provar que um problema de Cauchy de primeira ordem na forma normal, i.e., do tipo

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

(com  $x_0, y_0$  dados) admite uma e uma só solução (definida num intervalo centrado em  $x_0$ ), desde que a função  $f$  seja suficientemente “regular”<sup>14</sup>. Apesar da existência de um tal resultado (de natureza local) para funções  $f$  “gerais”, iremos apenas detalhar o caso em que a equação envolvida é “linear”. Voltaremos a esta questão mais adiante quando tratarmos especificamente este tipo de equações.

<sup>14</sup>Este resultado é conhecido pelo *Teorema de Cauchy-Picard* e pressupõe que a função  $f$  seja contínua num conjunto aberto  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  e satisfaça a condição

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq M |y_1 - y_2|$$

onde  $M > 0$  é uma constante independente de  $(x, y_1), (x, y_2) \in D$ .

Um dos objetivos principais deste capítulo é apresentar métodos de resolução que permitem obter a solução analítica<sup>15</sup> de alguns tipos de equações diferenciais. Como já tivemos oportunidade de referir dedicaremos também uma atenção especial à resolução de alguns problemas de Cauchy.

### 4.3 Equações diferenciais de primeira ordem

Nesta secção vamos discutir equações diferenciais do tipo

$$y' = f(x, y) \quad (4.16)$$

onde  $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . O caso mais simples ocorre quando o lado direito da equação depende apenas de  $x$  (i.e.,  $f(x, y) = g(x)$ ), visto que, como já vimos, nesse caso a equação resolve-se facilmente por primitivação da função  $g$ . Vejamos como lidar com algumas situações em que a função  $f$  não depende exclusivamente da variável independente  $x$ .

#### 4.3.1 EDOs de variáveis separáveis

Uma equação diferencial de primeira ordem diz-se de *variáveis separáveis* se puder escrever-se na forma (4.16) com

$$f(x, y) = \frac{p(x)}{q(y)}$$

---

<sup>15</sup>Em alguns casos a procura de soluções poderá ser feita do ponto de vista geométrico através de “campos de inclinações”. Para resolver uma equação da forma  $y' = f(x, y)$ , podemos tentar identificar segmentos de recta cuja inclinação nos pontos de coordenadas  $(x, y)$  é o valor (conhecido)  $f(x, y)$ . Este processo, baseado na interpretação geométrica do conceito de derivada, permite construir um *campo de direcções* no plano, a partir do qual se observa o comportamento das curvas que correspondem às soluções procuradas. Em certos casos, quando os argumentos analíticos ou geométricos não resolvem o problema, a procura de solução faz-se através de métodos numéricos adequados, onde a ideia geral é considerar aproximações sucessivas. No entanto, neste texto apenas vamos discutir métodos de resolução analíticos.

para algumas funções  $p$  e  $q$  que dependem apenas de  $x$  e de  $y$ , respetivamente (com  $q(y) \neq 0$ ). Assim, uma tal equação escreve-se sempre na forma

$$\boxed{q(y) y' = p(x)} \quad (4.17)$$

(podendo dizer-se, neste caso, de *variáveis separadas*), ou ainda, na forma diferencial<sup>16</sup>

$$q(y) dy = p(x) dx.$$

Em geral, as funções  $p$  e  $q$  assumem-se contínuas nos respetivos intervalos.

**Exemplo 4.12** As equações diferenciais (4.1), (4.3), (4.5), (4.8) e (4.9) são todas de variáveis separáveis. [\[Verifique!\]](#)

A técnica de resolução da equação (4.17) passa por tirar partido da própria separação de variáveis. De facto, se  $P$  e  $Q$  forem primitivas de  $p$  e  $q$ , respetivamente, e a relação

$$Q(y) = P(x) + C \quad (C \text{ é uma constante real}) \quad (4.18)$$

definir implicitamente  $y = \varphi(x)$  num certo intervalo<sup>17</sup>, então  $\varphi$  é solução da equação (4.17). Para verificar isto, basta derivar ambos os membros de (4.18) em ordem a  $x$ , usando para tal a regra de derivação da função composta. Reciprocamente, se  $\varphi$  for solução da equação (4.17), então

$$q(\varphi(x)) \varphi'(x) = p(x).$$

Primitivando ambos os membros (em relação a  $x$ ) obtemos

$$Q(\varphi(x)) = P(x) + C, \quad \text{com } C \in \mathbb{R},$$

o que mostra que  $\varphi$  é definida (implicitamente) por (4.18). Resumindo, a resolução da equação diferencial (4.17) passa pela primitivação de ambos os seus membros.

<sup>16</sup>Isto decorre do facto do *diferencial* de uma função  $y = \phi(x)$  ser dado por  $dy = \phi'(x) dx$ .

<sup>17</sup>O que é o caso quando  $q(y) \neq 0$ .

**Exemplo 4.13** A equação  $y' = y^2$  é de variáveis separáveis, pois podemos escrevê-la na forma

$$\frac{1}{y^2} y' = 1 \quad \text{ou} \quad \frac{1}{y^2} dy = dx \quad (y \neq 0).$$

Primitivando ambos os membros,

$$\int \frac{1}{y^2} dy = \int 1 dx,$$

obtemos

$$-\frac{1}{y} = x + C,$$

onde  $C$  é uma constante real arbitrária<sup>18</sup>. Neste caso, o integral geral da equação dada pode escrever-se na forma explícita:

$$y = -\frac{1}{x + C}, \quad C \in \mathbb{R}, \quad x \neq -C.$$

Observe-se que a função nula  $y = 0$  é também solução da EDO  $y' = y^2$ , apesar de não estar contida no integral geral.

**Exemplo 4.14** Para integrar a equação diferencial

$$y' = \frac{6x^2}{2y + \cos y}$$

podemos escrevê-la na forma equivalente

$$(2y + \cos y) dy = 6x^2 dx.$$

Por integração de ambos os membros obtemos

$$y^2 + \text{sen } y = 2x^3 + C, \quad C \in \mathbb{R},$$

o que representa o integral geral da equação (na forma implícita).

No conjunto de curvas definidas por esta família, podemos identificar aquela que passa no ponto de coordenadas  $(1, \pi)$ :

$$\pi^2 + \text{sen } \pi = 2(1)^3 + C \Leftrightarrow C = \pi^2 - 2.$$

---

<sup>18</sup>Poderíamos ter usado constantes diferentes em cada um dos lados da igualdade, digamos  $C_1$  do lado esquerdo e  $C_2$  do lado direito. Porém, estas seriam “agrupadas” numa única constante (arbitrária)  $C$  tomando  $C = C_1 - C_2$ .

Assim, a solução do PVI

$$\begin{cases} (2y + \cos y) y' = 6x^2 \\ y(1) = \pi \end{cases}$$

é dada (implicitamente) por

$$y^2 + \operatorname{sen} y = 2x^3 + \pi^2 - 2.$$

**Exemplo 4.15** Consideremos o seguinte problema de aplicação da chamada *Lei do Arrefecimento de Newton* (cf. Secção 4.1):

Uma esfera de cobre é aquecida a uma temperatura de  $100^\circ\text{C}$ . A esfera é então colocada num recipiente com água em que esta é mantida a uma temperatura constante de  $30^\circ\text{C}$ . Determine a forma como varia a temperatura ( $T$ ) da esfera ao longo do tempo ( $t$ ).

Recordando a equação (4.1), temos neste caso  $T_m = 30$ . Como a temperatura no instante inicial é de  $100^\circ\text{C}$ , a resolução do problema anterior passa pela resolução do problema de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{dT}{dt} = -k(T - 30) \\ T(0) = 100 \end{cases} \quad (4.19)$$

onde a constante (de arrefecimento)  $k > 0$  pode ser determinada a partir dos dados fornecidos. Ora, a equação diferencial envolvida é de variáveis separáveis, visto ser equivalente à equação

$$\frac{dT}{T - 30} = -k dt, \quad T \neq 30.$$

Por integração de ambos os membros obtemos o integral geral

$$T = C e^{-kt} + 30,$$

onde  $C$  é uma constante real não nula [[Verifique!](#)]. Repare-se, no entanto, que a função constante  $T = 30$ , inicialmente excluída, é igualmente solução da equação diferencial em (4.19) e poderá obter-se do integral geral considerando

$C = 0$ .

Usando a condição inicial  $T(0) = 100$ , chegamos à solução (particular) do problema

$$T = 70 e^{-kt} + 30, \quad t \geq 0.$$

Observe-se que a constante de arrefecimento  $k$  poderia ser calculada a partir de informação adicional. Por exemplo, se a temperatura da esfera fosse de  $70^\circ\text{C}$  ao fim de 3 minutos, o seu valor seria  $k = \frac{1}{3} \ln(\frac{7}{4}) \simeq 0,1865$ .

### 4.3.2 EDOs homogéneas

A equação diferencial (4.16) diz-se *homogénea* se  $f$  for uma *função homogénea de grau zero*<sup>19</sup>, i.e.

$$f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y), \quad \forall (x, y) \in D, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \text{tais que } (\lambda x, \lambda y) \in D.$$

Neste caso temos  $f(x, y) = f(1, y/x)$  ( $x \neq 0$ ) [Porquê?], pelo que uma equação homogénea pode sempre escrever-se na forma

$$\boxed{y' = g(y/x)} \tag{4.20}$$

em que  $g$  é uma função de uma variável apenas. Por sua vez, esta equação pode ser reduzida a uma equação de variáveis separáveis através de uma mudança de variável adequada. De facto, efetuando a substituição de variável (dependente)  $y = zx$ , a equação (4.20) fica na forma

$$z + xz' = g(z),$$

a qual é uma equação de variáveis separáveis em  $x$  e  $z$  [Porquê?]. Para determinar um integral geral desta última equação usamos a técnica de resolução discutida anteriormente para este tipo de equações. Um integral geral da equação homogénea inicial obtém-se então a partir deste último tendo em conta a substituição inversa  $z = y/x$ .

<sup>19</sup>Uma função real  $f$  definida num subconjunto  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  é homogénea de grau  $m \geq 0$  se

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^m f(x, y)$$

para todos  $(x, y) \in D$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$  tais que  $(\lambda x, \lambda y) \in D$ .

**Exemplo 4.16** Vamos resolver a equação  $x^2 dy = (x^2 + xy + y^2) dx$ . Esta pode escrever-se na forma

$$y' = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2} = 1 + \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2, \quad x \neq 0,$$

logo a equação diferencial dada é homogénea. Através da substituição  $y = zx$ , obtemos a equação de variáveis separáveis

$$\frac{1}{1+z^2} z' = \frac{1}{x},$$

que admite o integral geral

$$\arctg z = \ln |x| + C, \quad C \in \mathbb{R}. \quad [\text{Verifique!}]$$

Por conseguinte, um integral geral da equação homogénea dada tem a forma

$$\arctg \frac{y}{x} = \ln |x| + C, \quad \text{i.e.} \quad y = x \operatorname{tg}(\ln |x| + C), \quad C \in \mathbb{R}.$$

**Observação 4.4** As equações diferenciais da forma

$$y' = h \left( \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2} \right), \quad (4.21)$$

em que  $h$  é uma função de uma variável real e  $a_1, a_2, b_1, b_2$  são constantes reais, transformam-se em equações já conhecidas através de uma mudança de variável(eis) adequada(s):

- se  $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ , então a equação já é de variáveis separáveis, ou então uma das substituições  $z = a_1x + b_1y$  ou  $z = a_2x + b_2y$  converte-a numa equação desse tipo;
- se  $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ , então existem constantes  $\alpha$  e  $\beta$  tais que a substituição de variáveis dada pela translação

$$x = u + \alpha \quad \text{e} \quad y = z + \beta$$

transforma a equação (4.21) numa equação homogénea nas variáveis  $u$  (independente) e  $z$  (dependente), daí dizer-se, neste caso, que (4.21) é

uma EDO *reduzível a uma equação homogênea*. O par  $(\alpha, \beta)$  é a solução do sistema<sup>20</sup>

$$\begin{cases} a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0 \\ a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0. \end{cases}$$

Sugestão: Como aplicação resolva a equação diferencial  $y' = \frac{x + y + 4}{x - y - 6}$ .

### 4.3.3 EDOs exatas

Sejam  $M(x, y)$  e  $N(x, y)$  contínuas nalgum aberto  $D \subseteq \mathbb{R}^2$ . A equação

$$M(x, y) + N(x, y) y' = 0$$

ou, equivalentemente,

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0, \tag{4.22}$$

diz-se *diferencial exata* (em  $D$ ) se existir uma função  $F(x, y)$  de classe  $C^1$  (em  $D$ ) cujo diferencial total é exatamente a expressão do primeiro membro de (4.22), ou seja,

$$dF(x, y) = M(x, y) dx + N(x, y) dy.$$

Tal equivale a afirmar que

$$M = \frac{\partial F}{\partial x} \quad \text{e} \quad N = \frac{\partial F}{\partial y} \quad (\text{em } D).$$

É possível mostrar que qualquer solução  $y = \varphi(x)$  da EDO (4.22) verifica a relação  $F(x, \varphi(x)) = C$  (com  $C$  constante) e que, reciprocamente, se  $y = \varphi(x)$  for definida (implicitamente) por  $F(x, y) = C$ , então  $\varphi$  é solução de (4.22). Assim, resolver uma EDO exata significa encontrar uma função  $F(x, y)$  (nas condições indicadas) e indicar o conjunto de soluções da EDO na forma

$$F(x, y) = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

---

<sup>20</sup>Trata-se de um sistema possível e determinado (uma vez que  $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ ), o qual pode ser resolvido pelo método de substituição (já conhecido do Ensino Básico/Secundário), ou então através da chamada *regra de Cramer* (conhecida pelos alunos que frequentaram ALGA).

**Exemplo 4.17** A equação

$$y^2 dx + 2xy dy = 0$$

é uma equação diferencial exata (em  $\mathbb{R}^2$ ). De facto, considerando a função  $F(x, y) = xy^2$ , temos

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = y^2 \quad \text{e} \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 2xy \quad \text{para todo } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

As soluções da equação dada são definidas por  $xy^2 = C$ , onde  $C \in \mathbb{R}$ .

**Exemplo 4.18** A equação

$$(3xy + y^2) dx + (x^2 + xy) dy = 0$$

não é uma equação diferencial exata [Porquê?].

Existe um critério que permite verificar com facilidade se uma EDO escrita na forma (4.22) é (ou não) exata. Se o aberto  $D$  for *simplesmente conexo*<sup>21</sup> e as funções  $M$  e  $N$  forem de classe  $C^1$  em  $D$ , a equação (4.22) é diferencial exata se e só se

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x, y), \quad \forall (x, y) \in D.$$

**Exemplo 4.19** A equação

$$(y + 2xe^y) dx + (x^2e^y + x - 2y) dy = 0$$

é uma equação diferencial exata (em  $\mathbb{R}^2$ ), pois

$$\frac{\partial}{\partial y}(y + 2xe^y) = 1 + 2xe^y = \frac{\partial}{\partial x}(x^2e^y + x - 2y).$$

Vamos determinar  $F(x, y)$  tal que

$$dF = (y + 2xe^y) dx + (x^2e^y + x - 2y) dy.$$

---

<sup>21</sup>Geometricamente podemos pensar que um tal aberto  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  não tem “buracos”. Por exemplo, tanto o próprio  $\mathbb{R}^2$  como qualquer círculo aberto são simplesmente conexos, mas uma coroa circular já não possui esta propriedade.

- $\frac{\partial F}{\partial x} = y + 2xe^y \implies F(x, y) = yx + x^2e^y + \phi(y);$
- $\frac{\partial F}{\partial y} = x^2e^y + x - 2y \implies \frac{\partial}{\partial y} [yx + x^2e^y + \phi(y)] = x^2e^y + x - 2y.$   
 Da última igualdade resulta que  $\phi'(y) = -2y$ , pelo que  $\phi(y) = -y^2 + k$  com  $k \in \mathbb{R}$ .

Portanto, as soluções da equação são dadas por

$$yx + x^2e^y - y^2 = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Existem certas funções auxiliares que permitem transformar uma dada EDO não exata numa equação desse tipo. Chama-se *fator integrante* da equação  $M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$  a toda a função  $\mu(x, y)$  não nula tal que a equação

$$\mu(x, y) M(x, y) dx + \mu(x, y) N(x, y) dy = 0$$

é diferencial exata.

**Exemplo 4.20** A equação

$$3y + 4xy^2 + (2x + 3yx^2) y' = 0$$

não é diferencial exata. Um fator integrante para esta EDO é  $\mu(x, y) = yx^2$  [Verifique!].

O fator  $\mu$  deverá verificar

$$\mu \left( \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) = N \frac{\partial \mu}{\partial x} - M \frac{\partial \mu}{\partial y}$$

(supondo novamente que as funções envolvidas são de classe  $C^1$ ). Assim, obter um fator integrante  $\mu(x, y)$  pode ser, em geral, bastante complicado. No entanto, a determinação de um tal fator é facilitada quando ele depende apenas de uma das variáveis:

- Se

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} =: g(x) \quad (\text{dependente apenas de } x),$$

podemos tomar  $\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0$  (i.e., com  $\mu$  a depender apenas de  $x$ ) e escrever  $\mu(x) g(x) = \mu'(x)$ . Daqui resulta que

$$\mu(x) = e^{\int g(x) dx}.$$

- Se

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{M} =: h(y) \quad (\text{dependente apenas de } y),$$

podemos tomar  $\frac{\partial \mu}{\partial x} = 0$  (i.e., com  $\mu$  a depender apenas de  $y$ ) e escrever  $\mu(y) h(y) = -\mu'(y)$ . Daqui resulta que

$$\mu(y) = e^{\int -h(y) dy}.$$

**Exercício:** Mostre que  $2 \cos y \, dx - \operatorname{sen} y \, dy = 0$  não é uma equação diferencial exata, mas que é possível integrá-la recorrendo a fatores integrantes que só dependem de uma das variáveis. Verifique, em particular, que  $\mu_1(x) = e^{2x}$  e  $\mu_2(y) = \frac{1}{\cos y}$  são dois exemplos de tais fatores.

#### 4.3.4 EDOs lineares (de primeira ordem)

Um dos tipos de equações diferenciais mais importantes são as chamadas *equações lineares*<sup>22</sup>, as quais se podem escrever na forma

$$\boxed{a_0(x) y' + a_1(x) y = b(x)} \tag{4.23}$$

onde  $a_0, a_1, b$  são funções definidas num certo intervalo  $I$ , com  $a_0(x) \neq 0$  para todo  $x \in I$ . Quando  $b$  é a função nula (em  $I$ ), a equação (4.23) diz-se *incompleta* ou *homogénea* (não confundir com o conceito de equação homogénea anteriormente tratado; aqui a designação “homogénea” tem um significado

---

<sup>22</sup>Optou-se neste momento por discutir apenas as equações de primeira ordem. No entanto, iremos detalhar posteriormente o estudo das equações lineares de ordem arbitrária.

diferente). Dividindo ambos os membros por  $a_0(x)$ , podemos também escrever a equação linear na forma

$$y' + p(x)y = q(x). \tag{4.24}$$

**Exemplo 4.21** Das equações consideradas na Introdução são equações lineares de primeira ordem as equações (4.1), (4.3), (4.8) e (4.10). Destas, são homogêneas a segunda e a terceira (a primeira também o será quando  $T_m = 0$ ). Como iremos ver mais tarde, a equação (4.2) é igualmente linear, mas de segunda ordem. Não são lineares as equações diferenciais (4.5) e (4.9). [Porquê?]

Na próxima secção discutiremos a construção da solução geral de equações lineares de qualquer ordem (incluindo, é claro, as equações do tipo (4.23)). Neste momento, vamos discutir uma técnica de resolução para equações de primeira ordem.

A ideia é multiplicar ambos os membros da equação (4.24) por uma função  $\mu$  adequada por forma a que o primeiro membro, depois de multiplicado por  $\mu(x)$ , corresponda à derivada do produto  $\mu(x)y$ , ou seja,

$$\mu(x)[y' + p(x)y] = [\mu(x)y]'. \tag{4.25}$$

Se for possível encontrar uma tal função  $\mu$ , a equação (4.24) converte-se na equação

$$(\mu(x)y)' = \mu(x)q(x),$$

a qual se resolve por primitivação direta do lado direito:

$$\mu(x)y = \int \mu(x)q(x) dx.$$

Importa então saber como determinar uma tal função  $\mu$  (dita *fator integrante*). Ora, simplificando (4.25), obtemos

$$\mu(x)y' + \mu(x)p(x)y = \mu'(x)y + \mu(x)y' \quad \Leftrightarrow \quad \mu(x)p(x)y = \mu'(x)y,$$

o que significa que o factor  $\mu(x)$  que procuramos é solução da equação de variáveis separáveis

$$\mu p(x) = \mu',$$

em que um integral geral é dado por

$$\mu = C e^{P(x)}, \quad C \in \mathbb{R},$$

onde  $P$  representa uma primitiva da função  $p$  [Verifique!]. Em geral, podemos tomar  $C = 1$  e escolher o fator integrante  $\mu(x) = e^{P(x)}$ . Resumindo,

Para resolver a equação diferencial (4.24) basta determinar uma primitiva  $P$  da função  $p$ , multiplicar ambos os membros pelo fator integrante  $\mu(x) = e^{P(x)}$  e integrar de seguida em ordem a  $x$ .

**Exemplo 4.22** Considere-se a EDO linear  $y' - y = -e^x$ . Neste caso temos  $p(x) = -1$  e  $q(x) = -e^x$ . Uma primitiva da função constante igual a  $-1$  é  $P(x) = -x$ . Assim, um fator integrante é dado por  $\mu(x) = e^{-x}$ . Multiplicando ambos os membros da equação por  $e^{-x}$  obtemos

$$e^{-x}y' - e^{-x}y = -1, \quad \text{ou seja,} \quad \frac{d}{dx}(e^{-x}y) = -1.$$

Integrando vem

$$e^{-x}y = \int (-1) dx = -x + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Assim, a solução geral da equação linear dada é

$$y = (C - x) e^x, \quad C \in \mathbb{R}.$$

**Observação 4.5** Argumentos baseados em fatores integrantes já foram usados no âmbito das equações diferenciais exatas.

Recuperando os comentários do final da Secção 4.2 sobre a resolução de problemas de Cauchy de primeira ordem, apresentamos agora o seguinte resultado para o caso de equações lineares:

**Teorema 4.5 (existência e unicidade de solução global)**

Se  $p$  e  $q$  são funções contínuas num intervalo  $I$ , então o problema de Cauchy

$$\begin{cases} y' + p(x)y = q(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

tem nesse intervalo uma e uma só solução.

Pela sua importância em aplicações (e não só) os resultados deste tipo são dos mais importantes na teoria das equações diferenciais.

**Exemplo 4.23** O problema (4.19) é um problema de Cauchy de primeira ordem envolvendo uma equação linear nas variáveis  $T$  e  $t$  (com  $p(t) = k$  e  $q(t) = 30k$ ). Pelo Teorema 4.5 temos a garantia que o problema não tem outras soluções (em  $I = [0, +\infty)$ ) para além daquela já calculada, nomeadamente a solução

$$T(t) = 70 e^{-kt} + 30, \quad t \geq 0.$$

**4.3.5 Equações de Bernoulli**

Uma *equação diferencial de Bernoulli*<sup>23</sup> é uma equação diferencial da forma

$$\boxed{y' + a(x)y = b(x)y^\alpha} \quad (4.26)$$

em que  $\alpha \in \mathbb{R}$ . A equação (4.26) é linear se  $\alpha = 0$  ou  $\alpha = 1$  [Porquê?]. Para outros valores de  $\alpha$  a equação não é linear (nem de variáveis separáveis, em geral). Nestes casos, uma mudança de variável (dependente) adequada transforma a equação de Bernoulli numa equação linear. De facto, a equação (4.26) pode escrever-se na forma

$$y^{-\alpha}y' + a(x)y^{1-\alpha} = b(x)$$

(eventualmente com  $y \neq 0$ , apesar de a função nula ser solução da equação inicial quando  $\alpha > 0$ ). Com a substituição  $z = y^{1-\alpha}$  temos  $z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$ .

<sup>23</sup>Em homenagem ao matemático James Bernoulli (1654-1705) que estudou este tipo de equação. No entanto, deve-se a Leibniz o método de resolução apresentado neste texto.

Usando esta informação na equação anterior chegamos à equação

$$z' + (1 - \alpha)a(x)z = (1 - \alpha)b(x),$$

a qual é uma EDO linear de primeira ordem nas variáveis  $z$  e  $x$ .

**Exemplo 4.24** A equação diferencial

$$y' + y = e^x y^2$$

é uma equação de Bernoulli (com  $\alpha = 2$ ). A substituição  $z = 1/y$  ( $y \neq 0$ ) converte esta equação na equação diferencial linear

$$z' - z = -e^x$$

cuja solução geral foi já determinada no Exemplo 4.22. Assim,

$$z = (C - x)e^x, \quad C \in \mathbb{R},$$

pelo que um integral geral da equação de Bernoulli é dado (na forma explícita) por

$$y = \frac{e^{-x}}{C - x},$$

onde  $C$  é uma constante real arbitrária. Repare-se que a função nula  $y = 0$  (inicialmente excluída) é uma solução singular da equação. [\[Porquê?\]](#)

**Observação 4.6** A equação logística (4.5) é também uma equação de Bernoulli<sup>24</sup>. Usando o método de resolução discutido acima, podemos confirmar que o seu integral geral é, de facto, dado por (4.6).

### 4.3.6 Aplicação ao estudo de trajetórias ortogonais

Considere-se uma família de curvas planas admitindo reta tangente em cada ponto  $(x_0, y_0)$  com declive  $f(x_0, y_0)$ . Supondo que por cada um destes

---

<sup>24</sup>Para além de modelos populacionais, as equações de Bernoulli aparecem também em certos problemas de mecânica de fluidos. É o caso das equações da forma  $\frac{dy}{dt} = \lambda y + \sigma y^3$ , onde  $\lambda$  e  $\sigma$  são constantes.

pontos passa uma única curva e que, localmente, esta representa graficamente uma função  $y = \varphi(x)$ , então tal família de curvas corresponde ao integral geral da equação diferencial  $y' = f(x, y)$ . Uma **trajetória ortogonal**<sup>25</sup> dessa família é uma curva que intersesta ortogonalmente todas as suas curvas. Assim, o seu declive é dado por  $-\frac{1}{f(x_0, y_0)}$ . Por conseguinte, a família das trajetórias ortogonais é dada pelo integral geral da equação  $y' = -\frac{1}{f(x, y)}$ .

Na prática, para determinar as trajetórias ortogonais de uma família de curvas podemos proceder do seguinte modo:

- (1) determina-se a equação diferencial associada à família dada;
- (2) escreve-se a equação diferencial das trajetórias ortogonais [ $y' \rightsquigarrow -1/y'$ ];
- (3) integra-se a equação obtida no ponto anterior.

**Exemplo 4.25** Vamos determinar as trajetórias ortogonais da família das curvas dadas por  $y = kx$  ( $k$  constante), *i.e.*, das retas não verticais que passam pela origem. Derivando em ordem a  $x$  obtemos  $y' = k$ . Usando esta informação na primeira igualdade podemos “eliminar” a constante e escrever

$$y = y'x \Leftrightarrow y' = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0)$$

que é a equação associada à família daquelas retas. A equação diferencial das trajetórias ortogonais será então

$$y' = -\frac{x}{y} \quad (y \neq 0). \quad \text{[Porquê?]} \quad (4.27)$$

Trata-se de uma equação de variáveis separáveis que pode ser escrita na forma (de variáveis separadas)  $yy' = -x$ . Por integração imediata obtemos

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C_1,$$

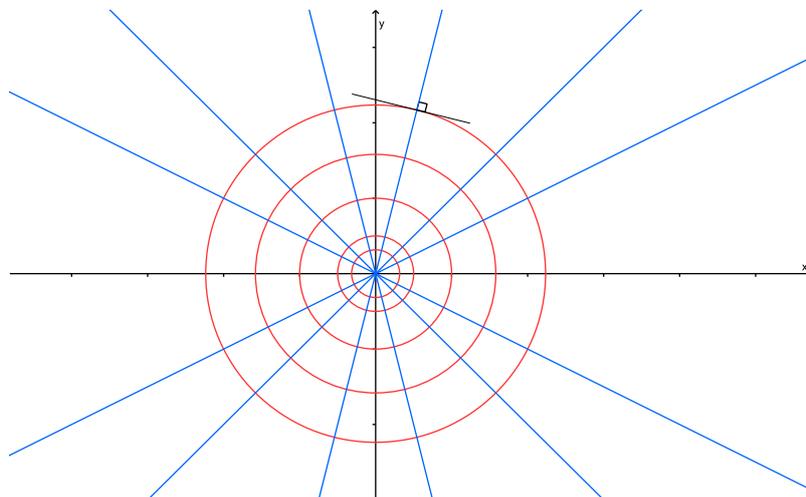
ou ainda,

$$x^2 + y^2 = C, \quad C = 2C_1 \in \mathbb{R}^+ \quad (\text{notar que } (x, y) \neq (0, 0)),$$

---

<sup>25</sup>Estas trajetórias aparecem, por exemplo, na construção de mapas meteorológicos. Podem surgir também em certos problemas de campos elétricos ou magnéticos (em que as linhas de força são ortogonais às linhas equipotenciais) e em problemas de aerodinâmica envolvendo linhas de fluxo.

pelo que as trajetórias ortogonais correspondem a circunferências centradas na origem (ver figura abaixo).



#### 4.4 Equações lineares de ordem arbitrária

Uma *equação diferencial linear de ordem  $n$*  ( $n \in \mathbb{N}$ ) é uma equação da forma

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = b(x) \quad (4.28)$$

onde  $a_0, a_1, \dots, a_n, b$  são funções (contínuas) num certo intervalo  $I$ , com  $a_0(x) \neq 0$  para todo  $x \in I$ . As funções  $a_j$  ( $j = 0, 1, \dots, n$ ) dizem-se os *coeficientes* da equação. Se todos os coeficientes da equação (4.28) forem funções constantes (em  $I$ ), então a equação diz-se de *coeficientes constantes*. Mantendo a terminologia anteriormente usada para as equações de primeira ordem, a equação (4.28) dir-se-á *incompleta* (ou *homogénea*) quando  $b$  é a função nula (em  $I$ ); caso contrário a equação linear diz-se *completa* (ou *não homogénea*).

**Exemplo 4.26** São lineares as equações diferenciais:

- $\frac{d^2x}{dt^2} + x = 0$   
(EDO linear homogénea de segunda ordem com coeficientes constantes).
- $e^x y' - \cos x y = x$   
(EDO linear completa de primeira ordem).
- $y^{(5)} + 2y' = 0$   
(EDO linear homogénea de quinta ordem com coeficientes constantes).  
Podemos dizer que esta é a equação homogénea associada, por exemplo, à equação completa  $y^{(5)} + 2y' = x^2$ .

Note-se, por exemplo, que a EDO  $yy'' + 3xy' = e^x$  não é linear. [Porquê?]

O resultado dado pelo Teorema 4.5 é igualmente válido para equações lineares de ordem superior. De facto, vale o seguinte resultado geral:

**Teorema 4.6 (existência e unicidade de solução global)**

Se  $a_0, a_1, \dots, a_n, b$  são funções contínuas num intervalo  $I$ ,  $a_0(x) \neq 0$  para todo  $x \in I$  e  $x_0 \in I$ , então, nesse intervalo, existe uma e uma só solução para o problema de Cauchy

$$\begin{cases} a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = b(x) \\ y(x_0) = \beta_0, \quad y'(x_0) = \beta_1, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = \beta_{n-1} \end{cases}$$

(onde  $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}$  são números reais dados).

**Exemplo 4.27** O problema de Cauchy

$$\begin{cases} x'' + x = 0 \\ x(0) = 2, \quad x'(0) = 2 \end{cases}$$

tem uma única solução em qualquer intervalo contendo a origem [Justifique!].

Na Secção 4.3 tivemos oportunidade de discutir um método de resolução (baseado em fatores integrantes) para equações lineares de primeira ordem.

O objectivo principal desta secção é mostrar como se constrói a solução geral (*i.e.*, a família de todas as soluções) de uma equação linear de ordem arbitrária.

Não é difícil mostrar que:

- (i) *Dadas duas soluções da equação (4.28), a sua diferença é solução da equação homogénea associada*

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0.$$

- (ii) *A soma de uma solução da equação (4.28) com uma solução da equação homogénea associada é também solução da equação (4.28).*

A partir destas informações é possível estabelecer o seguinte resultado:

**Teorema 4.7 (Solução geral de uma EDO linear completa)**

*A solução geral de uma equação linear completa obtém-se adicionando uma qualquer sua solução à solução geral da equação homogénea associada.*

**Exemplo 4.28** Considere-se a equação diferencial (linear completa de primeira ordem)

$$y' - 2y = e^{5x}.$$

A equação homogénea associada é a equação  $y' - 2y = 0$  e a sua solução geral é dada por  $y_h = C e^{2x}$ , com  $C \in \mathbb{R}$  (rever o Exemplo 4.5). Uma solução da EDO completa é  $y_p = \frac{1}{3} e^{5x}$  [Verifique!]. Pelo Teorema 4.7 concluímos que a solução geral da equação completa é

$$y = C e^{2x} + \frac{1}{3} e^{5x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

O Teorema 4.7 diz-nos que a solução geral de uma equação linear (completa) é então dada por

$$y = y_h + y_p$$

onde:

- $y_h$  é a solução geral da equação homogénea que lhe está associada;
- $y_p$  é uma solução particular da equação completa.

Vamos ver como tratar cada um destes problemas (*i.e.*, como determinar aqueles  $y_h$  e  $y_p$ ).

#### 4.4.1 Equações lineares homogéneas

Já sabemos como resolver equações diferenciais lineares homogéneas de primeira ordem. De facto, uma tal equação é sempre de variáveis separáveis, visto ter a forma

$$a_0(x) y' + a_1(x) y = 0$$

(com  $a_0$  diferente de zero no intervalo considerado). A sua solução geral é dada por

$$y = C e^{-A(x)} \quad \text{[Verifique!]} \quad (4.29)$$

onde  $C$  é uma constante real arbitrária e  $A(x)$  denota uma primitiva da função  $\frac{a_1}{a_0}$ .

**Exemplo 4.29** Considere-se a equação linear  $x^2 y' + xy = 1$  no intervalo  $]0, +\infty[$ . A sua equação homogénea associada é a equação (de variáveis separáveis)  $x^2 y' + xy = 0$ . A solução geral desta equação é dada por

$$y = C e^{-\int \frac{1}{x} dx} = \frac{C}{x}, \quad C \in \mathbb{R}, \quad x > 0.$$

A resolução de uma equação linear homogénea de ordem arbitrária baseia-se no seguinte resultado<sup>26</sup>:

---

<sup>26</sup>O resultado apresentado decorre do facto (não trivial) do conjunto de todas as soluções da equação (4.30) formar um *espaço vetorial de dimensão n*. Os alunos que frequentaram ALGA recordar-se-ão do que isto significa. Observe-se que (4.31) traduz o facto de qualquer solução  $\varphi$  ser *combinação linear* das soluções  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ . Estas últimas dizem-se *linearmente independentes* pelo facto de nenhuma delas se conseguir escrever como combinação linear das restantes.

**Teorema 4.8** *Toda a equação linear homogénea de ordem  $n$*

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0, \quad (4.30)$$

*num dado intervalo  $I$  ( $a_0, a_1, \dots, a_n$  contínuas em  $I$ ;  $a_0(x) \neq 0$  para todo  $x \in I$ ) admite  $n$  soluções,  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ , linearmente independentes e qualquer outra sua solução,  $\varphi$ , se pode escrever na forma*

$$\varphi = C_1\varphi_1 + \dots + C_n\varphi_n, \quad (4.31)$$

*onde as constantes  $C_j$  são determinadas (de modo único) por  $\varphi$ .*

Um conjunto de  $n$  soluções linearmente independentes de uma equação linear homogénea também se designa por *sistema fundamental de soluções*<sup>27</sup>.

Em termos práticos podemos usar o seguinte resultado para provar a independência linear<sup>28</sup>:

$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  são linearmente independentes num intervalo  $I$



$$[\forall c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}, (\forall x \in I, c_1\varphi_1(x) + \dots + c_n\varphi_n(x) = 0) \Rightarrow c_1 = \dots = c_n = 0].$$

A este respeito refira-se que as funções do tipo

$$x^k e^{\alpha x} \cos(\beta x) \quad \text{e} \quad x^k e^{\alpha x} \sin(\beta x) \quad (k \in \mathbb{N}_0, \alpha \in \mathbb{R}, \beta > 0)$$

<sup>27</sup>Sem se pretender entrar em muitos detalhes, os alunos com conhecimentos de ALGA deverão reparar que um sistema fundamental de soluções constitui uma *base* do espaço vectorial das soluções (referido na anterior nota de rodapé).

<sup>28</sup>Em alternativa, também podemos usar um resultado que afirma que as soluções  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  de (4.30) em  $I$  são linearmente independentes se, e só se, o determinante (dito *wronskiano*, em homenagem ao matemático polaco Jozef Wronski (1778-1853))

$$W(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n) := \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \dots & \varphi_n \\ \varphi_1' & \varphi_2' & \dots & \varphi_n' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)} & \varphi_2^{(n-1)} & \dots & \varphi_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

for diferente de zero nesse intervalo, se, e só se, for diferente de zero num ponto desse intervalo.

são linearmente independentes em  $\mathbb{R}$  (em particular, estão aqui incluídas as funções seno e cosseno e as funções do tipo de potência e exponencial).

**Exemplo 4.30** As funções seno e cosseno são soluções da equação linear homogénea  $y'' + y = 0$  em  $\mathbb{R}$  (recordar, a propósito, o Exemplo 4.3). Por outro lado, estas funções são linearmente independentes (em  $\mathbb{R}$ ) [Porquê?]. Assim, o conjunto  $\{\cos x, \sin x\}$  é um sistema fundamental de soluções da equação considerada. Consequentemente, a solução geral é dada por

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

(recordar também o que foi dito no ponto 4 do Exemplo 4.4).

**Observação 4.7** Pelo exposto no Exemplo 4.30 podemos observar que o problema de fronteira

$$\begin{cases} y'' + y = 0 \\ y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0 \end{cases}$$

tem uma infinidade de soluções no intervalo  $[0, \pi]$  [Porquê?]. Isto mostra que não é válido para problemas de valores de fronteira um resultado análogo ao indicado no Teorema 4.6 para problemas de valores iniciais.

Vimos que a resolução de uma equação linear homogénea reduz-se afinal à determinação de um sistema fundamental de soluções. Porém, não existe um método geral que permita obter um tal sistema para equações de ordem  $n > 1$  com coeficientes arbitrários. No entanto, como iremos ver, no caso particular das equações com coeficientes constantes é possível identificar um sistema fundamental de soluções através do estudo das raízes de certos polinómios. Faremos tal estudo na próxima secção.

#### 4.4.2 Método da variação das constantes

Vamos agora apresentar um método para determinar uma solução particular da equação linear completa (4.28). Começemos pelas equações de

primeira ordem. Já tivemos oportunidade de ver que a solução geral da equação homogénea  $a_0(x) y' + a_1(x) y = 0$  é dada por

$$y = C e^{-A(x)}, \quad C \in \mathbb{R},$$

onde  $A(x)$  denota uma primitiva de  $\frac{a_1(x)}{a_0(x)}$  (recorde-se (4.29) e o facto de se supor que a função  $a_0$  não se anula no intervalo considerado).

Admita-se agora que  $C$  é uma função (diferenciável) de  $x$ . Então

$$y_p = C(x) e^{-A(x)}$$

será uma solução da equação completa se

$$a_0(x) C'(x) e^{-A(x)} = b(x) \quad \text{[Verifique!]}$$

Portanto,  $C(x)$  obtém-se por mera primitivação:

$$C(x) = \int \frac{b(x)}{a_0(x)} e^{A(x)} dx$$

(recorde-se que aquela função integranda é sempre primitivável tendo em conta a continuidade das funções  $a_0, a_1, b$  inicialmente assumida). Tomando uma qualquer daquelas primitivas, digamos  $P(x)$ , obtemos a solução particular  $y_p = P(x) e^{-A(x)}$ , pelo que a solução da equação completa é da forma

$$y = C e^{-A(x)} + P(x) e^{-A(x)}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Como a primeira parcela do lado direito corresponde à solução geral da equação homogénea, a segunda parcela será então uma solução particular da equação completa (atendendo ao Teorema 4.7).

**Exemplo 4.31** Considere-se novamente a equação  $y' - 2y = e^{5x}$  do Exemplo 4.28 e mostremos como obter a solução particular aí considerada por *variação da constante*. Procuremos uma solução particular da forma  $y_p = C(x) e^{2x}$ . Então  $y'_p = C'(x) e^{2x} + 2C(x) e^{2x}$ . Substituindo na equação dada, obtemos

$$C'(x) = e^{3x} \quad \Rightarrow \quad C(x) = \frac{e^{3x}}{3}.$$

Portanto,

$$y_p = \frac{e^{3x}}{3} e^{2x} = \frac{e^{5x}}{3}$$

confirmando-se, assim, a tal solução particular que já havia sido indicada.

Consequentemente,

$$y = C e^{2x} + \frac{e^{5x}}{3}, \quad C \in \mathbb{R},$$

é a solução geral da equação dada.

O procedimento anteriormente descrito para determinar uma solução particular da equação linear completa (4.28) de primeira ordem pode ser generalizado a equações de ordem superior.

Suponha-se conhecida a solução geral da sua equação homogénea associada (4.30):

$$y_h = C_1 \varphi_1(x) + \dots + C_n \varphi_n(x), \quad C_1, \dots, C_n \in \mathbb{R},$$

onde  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$  é um sistema fundamental de soluções desta equação.

Vamos admitir que aquelas constantes  $C_j$  são funções (diferenciáveis) de  $x$  (em vez de meras constantes, o que justifica o nome do método).

- Procura-se uma solução particular da equação completa (4.28) da forma

$$y_p = C_1(x) \varphi_1(x) + \dots + C_n(x) \varphi_n(x). \quad (4.32)$$

- A função anterior será uma solução de (4.28) se as derivadas daquelas funções  $C_j(x)$  forem solução do sistema<sup>29</sup>

$$\begin{cases} C_1' \varphi_1 + \dots + C_n' \varphi_n = 0 \\ C_1' \varphi_1' + \dots + C_n' \varphi_n' = 0 \\ \vdots \\ C_1' \varphi_1^{(n-2)} + \dots + C_n' \varphi_n^{(n-2)} = 0 \\ C_1' \varphi_1^{(n-1)} + \dots + C_n' \varphi_n^{(n-1)} = \frac{b}{a_0} \end{cases}$$

<sup>29</sup>Trata-se de um sistema de  $n$  equações com  $n$  incógnitas, nomeadamente  $C_1', \dots, C_n'$ . Repare-se que este sistema é possível e determinado, uma vez que o seu determinante (o wronskiano) não se anula no intervalo considerado em virtude da independência linear das funções  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ .

(onde as primeiras  $(n - 1)$  igualdades são escolhidas para simplificar a expressão das sucessivas derivadas de  $y_p(x)$  (até à ordem  $n - 1$ ) e a última é escolhida por forma a que  $y_p$  seja, efetivamente, uma solução de (4.28)).

- Depois de resolvido o sistema anterior, obtemos as funções  $C_j(x)$  por integração direta:

$$\begin{cases} C'_1(x) = g_1(x) \\ \vdots \\ C'_n(x) = g_n(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1(x) = \int g_1(x) dx \\ \vdots \\ C_n(x) = \int g_n(x) dx \end{cases}.$$

- Tomando  $G_1, \dots, G_n$  primitivas das funções  $g_1, \dots, g_n$ , respetivamente, substituímos na igualdade (4.32) e obtemos a solução particular

$$y_p = G_1(x)\varphi_1(x) + \dots + G_n(x)\varphi_n(x).$$

**Exemplo 4.32** Vamos resolver a equação  $y'' + y = \operatorname{cosec} x$ , no intervalo  $]0, \pi[$ , pelo método da variação das constantes.

- (1) Solução geral da equação homogénea associada (rever Exemplo 4.30):

$$y_h = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

- (2) Por variação das constantes procure-se uma solução particular da forma

$$y_p = C_1(x) \cos x + C_2(x) \operatorname{sen} x,$$

onde

$$\begin{cases} C'_1(x) \cos x + C'_2(x) \operatorname{sen} x = 0 \\ C'_1(x)(-\operatorname{sen} x) + C'_2(x) \cos x = \operatorname{cosec} x. \end{cases}$$

Este sistema é equivalente a

$$\begin{cases} C'_1(x) = -1 \\ C'_2(x) = \cotg x \end{cases} \quad \text{[Verifique!]}$$

Podemos então tomar

$$C_1(x) = -x \quad \text{e} \quad C_2(x) = \ln(\operatorname{sen} x), \quad 0 < x < \pi,$$

e, por conseguinte, considerar a solução particular

$$y_p = -x \cos x + \operatorname{sen} x \ln(\operatorname{sen} x).$$

(3) A solução geral da equação dada é da forma

$$\begin{aligned} y &= \underbrace{C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x}_{y_h} \underbrace{-x \cos x + \operatorname{sen} x \ln(\operatorname{sen} x)}_{y_p}, \quad 0 < x < \pi, \\ &= (C_1 - x) \cos x + (C_2 + \ln(\operatorname{sen} x)) \operatorname{sen} x, \quad 0 < x < \pi, \end{aligned}$$

onde  $C_1, C_2$  são constantes reais arbitrárias.

Terminamos esta secção com um resultado que pode ser útil em algumas situações onde se pretende determinar uma solução particular de uma equação linear completa. Trata-se de uma consequência imediata da linearidade.

**Teorema 4.9 (Princípio de Sobreposição)**

*Suponha-se que  $y_k$  ( $k = 1, 2$ ) é uma solução particular da equação*

$$a_0(x) y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x) y' + a_n(x) y = b_k(x).$$

*Então  $y_p = y_1 + y_2$  é uma solução particular da equação*

$$a_0(x) y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x) y' + a_n(x) y = b_1(x) + b_2(x).$$

**Exemplo 4.33** Vimos no Exemplo 4.32 que  $y_1 = -x \cos x + \operatorname{sen} x \ln(\operatorname{sen} x)$  é uma solução particular da equação

$$y'' + y = \operatorname{cosec} x$$

no intervalo  $]0, \pi[$ . Por outro lado,  $y_2 = x$  é uma solução particular da equação

$$y'' + y = x.$$

Assim,

$$y_p = x - x \cos x + \operatorname{sen} x \ln(\operatorname{sen} x)$$

é uma solução particular (em  $]0, \pi[$ ) da equação

$$y'' + y = x + \operatorname{cosec} x.$$

## 4.5 Equações lineares de coeficientes constantes

### 4.5.1 Solução geral de equações homogéneas

Na Secção 4.4 discutiu-se a construção da solução geral de uma equação linear com coeficientes quaisquer. Um dos problemas a resolver é a determinação da solução geral da equação linear homogénea associada. No caso de equações de primeira ordem, a equação homogénea é sempre uma equação de variáveis separáveis e, portanto, já conhecemos a abordagem a seguir. No caso de equações de ordem superior, a determinação da solução geral da equação homogénea é imediata desde que se identifique um sistema fundamental de soluções (rever Teorema 4.8). Porém, esta última tarefa poderá revelar-se bastante complicada quando lidamos com equações lineares com coeficientes arbitrários. No entanto, veremos que é relativamente simples identificar um sistema fundamental de soluções no caso de equações com coeficientes constantes, *i.e.*, de equações da forma

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \quad (4.33)$$

onde  $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  com  $a_0 \neq 0$ .

Veja-se o que acontece com no caso particular de equações de primeira ordem:  $a_0 y' + a_1 y = 0$ . A solução geral desta equação é da forma

$$y = C e^{-\frac{a_1}{a_0} x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Repare-se que  $r = -a_1/a_0$  é a solução da equação (algébrica)  $a_0 r + a_1 = 0$ .

No caso de equações de ordem superior, a ideia é procurar também soluções da forma  $y = e^{rx}$  (para valores de  $r \in \mathbb{R}$  convenientes).

Nesse caso, teríamos  $y^{(n)} = r^n e^{rx}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Substituindo na equação obtemos

$$a_0 r^n e^{rx} + a_1 r^{n-1} e^{rx} + \dots + a_{n-1} r e^{rx} + a_n e^{rx} = 0$$

ou seja,

$$(a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \dots + a_{n-1} r + a_n) e^{rx} = 0$$

Como  $e^{rx} \neq 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$  (e todo  $r \in \mathbb{R}$ ), então

$$\underbrace{a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \dots + a_{n-1} r + a_n}_{P(r)} = 0, \tag{4.34}$$

o que significa que  $r$  é raiz do polinómio  $P(r)$ , o qual se designa por *polinómio característico* da equação diferencial (4.33). A equação algébrica (4.34) toma o nome de *equação característica* (da equação diferencial (4.33)).

Portanto, teremos de determinar as  $n$  raízes<sup>30</sup> do polinómio  $P(r)$ . No caso particular  $n = 2$ , o polinómio característico é

$$P(r) = a_0 r^2 + a_1 r + a_2,$$

pelo que o estudo das suas raízes poderá ser realizado através do sinal do discriminante  $\Delta = a_1^2 - 4a_0 a_2$ . Para polinómios de grau superior deverá ter-se presente o facto destes se poderem decompor num produto de factores do primeiro e segundo grau com coeficientes reais.

A correspondência entre as  $n$  raízes do polinómio característico e as  $n$  soluções (linearmente independentes) da equação diferencial (4.33) pode ser sistematizada do seguinte modo:

**1.º caso:**  $P(r)$  POSSUI  $n$  RAÍZES REAIS DISTINTAS  $r_1, r_2, \dots, r_n$ .

As funções

$$e^{r_1 x}, e^{r_2 x}, \dots, e^{r_n x}$$

---

<sup>30</sup>Uma vez que  $P(r)$  é um polinómio de grau  $n$  com coeficientes reais, o *Teorema Fundamental da Álgebra* garante a existência de  $n$  raízes (em  $\mathbb{C}$ ). As raízes do polinómio  $P(r)$  poderão ser reais ou complexas e serem simples ou terem multiplicidade superior a 1. Se  $\alpha + i\beta$  for raiz de  $P(r)$ , então  $\alpha - i\beta$  é também uma sua raiz (dita *raiz conjugada*).

são  $n$  soluções linearmente independentes da EDO (4.33). Por conseguinte, a solução geral desta equação diferencial é da forma

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + \dots + C_n e^{r_n x}, \quad C_1, \dots, C_n \in \mathbb{R}.$$

**Exemplo 4.34** Considere-se a equação diferencial

$$y''' + 4y'' - 5y' = 0.$$

A equação característica é

$$r^3 + 4r^2 - 5r = 0 \Leftrightarrow r(r - 1)(r + 5) = 0,$$

com as raízes (simples)  $r = 0$ ,  $r = 1$  e  $r = -5$ . A solução geral da equação diferencial é dada por

$$y = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{-5x}, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

**2.º caso:**  $P(r)$  POSSUI  $n$  RAÍZES REAIS E (PELO MENOS) UMA DELAS TEM MULTIPLICIDADE  $k > 1$ .

Suponhamos que se tem  $r_1 = r_2 = \dots = r_k = r$ . Então

$$e^{rx}, \quad x e^{rx}, \dots, \quad x^{k-1} e^{rx}$$

são  $k$  soluções linearmente independentes. Assim, forma-se um sistema fundamental de soluções juntando a estas as  $(n - k)$  soluções geradas pelas restantes  $(n - k)$  raízes reais.

**Exemplo 4.35** Considere-se a equação diferencial

$$y''' - 5y'' + 8y' - 4y = 0.$$

A equação característica é

$$r^3 - 5r^2 + 8r - 4 = 0 \Leftrightarrow (r - 1)(r - 2)^2 = 0,$$

a qual tem a raiz simples  $r = 1$  e a raiz dupla  $r = 2$ . Consequentemente, a solução geral da equação diferencial dada é

$$y = C_1 e^x + (C_2 + C_3 x) e^{2x}, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

**3.º caso:**  $P(r)$  TEM (PELO MENOS) UMA RAIZ COMPLEXA SIMPLES.

Suponhamos que  $r = \alpha \pm i\beta$  são raízes simples do polinómio característico. Prova-se que

$$e^{\alpha x} \cos(\beta x) \quad \text{e} \quad e^{\alpha x} \text{sen}(\beta x)$$

são duas soluções linearmente independentes<sup>31</sup>.

**Exemplo 4.36** Considere-se a equação diferencial

$$y'' + 2y' + 5y = 0.$$

A sua equação característica é

$$r^2 + 2r + 5 = 0$$

e tem as raízes complexas simples  $r = -1 + 2i$  e  $r = -1 - 2i$ . A solução geral da equação diferencial tem a forma

$$y = e^{-x} (C_1 \cos(2x) + C_2 \text{sen}(2x)), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

**4.º caso:**  $P(r)$  TEM (PELO MENOS) UMA RAIZ COMPLEXA DE MULTIPLICIDADE  $k > 1$ .

Se  $r = \alpha \pm i\beta$  são raízes de multiplicidade  $k$  prova-se que

$$e^{\alpha x} \cos(\beta x), \quad x e^{\alpha x} \cos(\beta x), \dots, \quad x^{k-1} e^{\alpha x} \cos(\beta x),$$

$$e^{\alpha x} \text{sen}(\beta x), \quad x e^{\alpha x} \text{sen}(\beta x), \dots, \quad x^{k-1} e^{\alpha x} \text{sen}(\beta x)$$

são  $2k$  soluções linearmente independentes.

---

<sup>31</sup>As raízes  $r = \alpha + i\beta$  e  $\bar{r} = \alpha - i\beta$  dão origem às funções complexas  $e^{(\alpha+i\beta)x}$  e  $e^{(\alpha-i\beta)x}$ , respetivamente. Recordando a fórmula de Euler  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \text{sen} \theta$ , observamos que ambas as funções exponenciais se podem exprimir à custa (de uma combinação linear complexa) das funções reais  $e^{\alpha x} \cos(\beta x)$  e  $e^{\alpha x} \text{sen}(\beta x)$ . Consequentemente, são estas últimas que escolhemos para construir um sistema fundamental de soluções.

**Exemplo 4.37** Considere-se agora a equação diferencial

$$y^{(4)} + 4y'' + 4y = 0.$$

A sua equação característica é

$$r^4 + 4r^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow (r^2 + 2)^2 = 0.$$

Então  $r = i\sqrt{2}$  é uma raiz dupla desta equação (o mesmo acontecendo com  $\bar{r} = -i\sqrt{2}$ ). Por conseguinte, a solução geral da equação diferencial é dada por

$$y = (C_1 + C_2x) \cos(\sqrt{2}x) + (D_1 + D_2x) \sin(\sqrt{2}x), \quad C_1, C_2, D_1, D_2 \in \mathbb{R}.$$

#### 4.5.2 Método dos coeficientes indeterminados na determinação de soluções particulares

Na Secção 4.4 vimos como determinar uma solução particular de uma equação linear completa usando o método da variação das constantes. Ora, se a equação a resolver for de coeficientes constantes, então podemos, em alternativa, determinar uma sua solução particular de modo diferente, onde se considera que a solução que procuramos tem uma determinada forma (estabelecida a partir da informação do segundo membro da equação e das raízes do polinómio característico da equação homogénea associada).

Considere-se a equação linear

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = b(x) \quad (4.35)$$

( $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ ,  $a_0 \neq 0$ ) com a função  $b$  da forma

$$b(x) = P_m(x) e^{\alpha x} \cos(\beta x) \quad \text{ou} \quad b(x) = P_m(x) e^{\alpha x} \sin(\beta x),$$

onde  $P_m(x)$  denota um polinómio de grau  $m \in \mathbb{N}_0$  e  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Prova-se que existe uma solução particular da equação (4.35) do tipo

$$y_p(x) = x^k e^{\alpha x} (P(x) \cos(\beta x) + Q(x) \sin(\beta x))$$

onde:

- $k \in \mathbb{N}$  é a multiplicidade de  $r = \alpha + i\beta$  enquanto raiz do polinómio característico da equação homogénea associada ( $k = 0$  se  $r = \alpha + i\beta$  não for raiz desse polinómio);
- $P(x), Q(x)$  são polinómios de grau  $m$  cujos coeficientes terão de ser determinados (daí o nome do método).

**Exemplo 4.38** Vamos determinar uma solução particular da equação diferencial  $y' - 3y = e^{3x}$ . Temos

$$e^{3x} = P(x) e^{\alpha x} \cos(\beta x)$$

com  $P(x) \equiv 1$  (grau zero),  $\alpha = 3$  e  $\beta = 0$ . Como  $r = 3$  é raiz (simples) do polinómio característico da equação homogénea associada, então a solução particular procurada é da forma

$$y_p = x(A) e^{3x}, \quad \text{com } A \in \mathbb{R} \text{ a determinar.}$$

Assim,  $y'_p = A e^{3x} + 3Ax e^{3x}$ . Substituindo  $y_p$  e  $y'_p$  na equação dada obtemos

$$(A - 1) e^{3x} = 0 \quad \Rightarrow \quad A = 1.$$

Consequentemente,  $y_p = x e^{3x}$ .

**Exemplo 4.39** Vamos considerar o mesmo problema agora para a equação  $y'' - 3y' - 4y = 4x^2$ . Temos

$$4x^2 = P(x) e^{\alpha x} \cos(\beta x)$$

com  $P(x) \equiv 4x^2$  (grau dois),  $\alpha = 0$  e  $\beta = 0$ . Como  $r = 0$  não é raiz do polinómio característico da equação homogénea associada, a solução particular procurada é da forma

$$y_p = Ax^2 + Bx + C, \quad \text{para alguns } A, B, C \in \mathbb{R} \text{ a determinar.}$$

Temos  $y'_p = 2Ax + B$  e  $y''_p = 2A$ . A substituição de  $y_p, y'_p$  e  $y''_p$  na equação dada conduz à igualdade

$$-4Ax^2 - (6A + 4B)x + 2A - 3B - 4C = 4x^2.$$

Daqui resulta que

$$\begin{cases} -4A = 4 \\ -6A - 4B = 0 \\ 2A - 3B - 4C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = \frac{3}{2} \\ C = -\frac{13}{8}. \end{cases}$$

Consequentemente,  $y_p = -x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{13}{8}$ .

**Observação 4.8** Existem outros métodos de resolução de equações diferenciais de ordem superior (lineares ou não). Alguns deles baseiam-se numa mudança de variável adequada, procurando baixar a ordem da equação diferencial ou reduzir o estudo a situações conhecidas. Não iremos detalhar mais este assunto aqui. Fica apenas a informação que algumas destas técnicas são apresentadas, por exemplo, na parte final do segundo capítulo nos apontamentos [12].

## 5 Transformada de Laplace

Neste capítulo apresentamos uma ferramenta que se revelará bastante útil na resolução de certos problemas envolvendo equações diferenciais. Trata-se de uma “transformação” que consiste em converter uma dada função numa outra através de um integral impróprio apropriado. Como iremos ver, uma das suas vantagens reside no facto de permitir transformar derivadas em polinómios (num certo sentido), o que facilita a resolução de alguns tipos de problemas de valores iniciais.

### 5.1 Definição e propriedades

Seja  $f$  uma função real definida (pelo menos) em  $\mathbb{R}_0^+$ . Considere-se o integral impróprio<sup>32</sup>

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

onde  $s$  é um parâmetro real. Naturalmente, o integral poderá ou não convergir (dependendo, em geral, do valor de  $s$ ).

**Exemplo 5.1** Considere-se o caso da função constante  $f(t) = 1$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Começemos por observar que, para cada  $b > 0$ , temos

$$\int_0^b e^{\alpha t} dt = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} e^{\alpha b} - \frac{1}{\alpha}, & \text{se } \alpha \neq 0, \\ b, & \text{se } \alpha = 0, \end{cases}$$

pelo que

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b e^{\alpha t} dt = \begin{cases} -\frac{1}{\alpha}, & \text{se } \alpha < 0 \\ +\infty, & \text{se } \alpha \geq 0. \end{cases}$$

Portanto, o integral impróprio  $\int_0^{\infty} e^{\alpha t} dt$  converge se e só se  $\alpha < 0$ , sendo, nesse caso, o seu valor igual a  $-\frac{1}{\alpha}$ . Daqui conclui-se que

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \frac{1}{s}, \quad \text{para } s > 0.$$

---

<sup>32</sup>Este assunto já foi estudado em Cálculo I, pelo que se aconselha uma breve revisão do mesmo (sugere-se a consulta do material disponível no *Moodle*).

Assim, podemos definir uma nova função,

$$F: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$s \mapsto F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \frac{1}{s},$$

a qual representa aquilo a que chamaremos a *transformada de Laplace* da função  $f$ .

### Definição 5.1 (Transformada de Laplace)

Chama-se *transformada de Laplace*<sup>33</sup> da função  $f: [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  à função  $\mathcal{L}\{f\}$  definida por

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt,$$

sempre que este integral impróprio seja convergente.

**Observação 5.1** Podemos escrever  $\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$  para indicar a transformada de Laplace de  $f$ . Ao escrever-se desta forma salienta-se o facto da função inicial  $f$  depender de  $t$ , enquanto que a transformada  $\mathcal{L}\{f\}$  é calculada em  $s$  (o parâmetro do integral). É também habitual usar-se a letra  $F$  para denotar a transformada de Laplace de  $f$ .

**Exemplo 5.2** Do Exemplo 5.1 resulta que

$$\mathcal{L}\{1\}(s) = \frac{1}{s}, \quad s > 0.$$

**Exemplo 5.3** Seja  $g: [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $g(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \neq 2, \\ 0 & \text{se } t = 2. \end{cases}$

Temos

$$\mathcal{L}\{g\}(s) = \frac{1}{s}, \quad s > 0. \quad [\text{Verifique!}]$$

---

<sup>33</sup>Em homenagem ao matemático e físico francês Pierre Simon Laplace (1749-1827), o qual teve importantes contribuições na física-matemática, na astronomia e na teoria das probabilidades

A transformada de Laplace é um caso particular das chamadas *transformadas integrais* que são de grande utilidade na resolução de problemas em várias ciências, incluindo a própria Matemática. Esta transformada pode ser definida em contextos mais gerais do que aquele que estamos a considerar neste texto.

**Exemplo 5.4** Tendo em conta o estudo do integral impróprio  $\int_0^\infty e^{at} dt$  realizado no Exemplo 5.1, conclui-se imediatamente que

$$\boxed{\mathcal{L}\{e^{at}\}(s) = \frac{1}{s-a}, \quad s > a} \quad (a \in \mathbb{R}).$$

Recorrendo à integração por partes não é difícil mostrar que

$$\boxed{\mathcal{L}\{t^n\}(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0}$$

$$\boxed{\mathcal{L}\{\text{sen}(at)\}(s) = \frac{a}{s^2 + a^2}, \quad s > 0}$$

$$\boxed{\mathcal{L}\{\text{cos}(at)\}(s) = \frac{s}{s^2 + a^2}, \quad s > 0}$$

para todos  $a \in \mathbb{R}$  e  $n \in \mathbb{N}_0$ .

Atendendo às propriedades dos integrais impróprios verifica-se facilmente que a transformada de Laplace goza da linearidade:

**Proposição 5.1** *Sejam  $\alpha \in \mathbb{R}$  e  $f, g : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ . Suponha-se que existem  $\mathcal{L}\{f\}(s)$  e  $\mathcal{L}\{g\}(s)$  para  $s > s_f$  e  $s > s_g$ , respetivamente. Então:*

- (i)  $\mathcal{L}\{f + g\}(s) = \mathcal{L}\{f\}(s) + \mathcal{L}\{g\}(s), \quad s > \max\{s_f, s_g\};$
- (ii)  $\mathcal{L}\{\alpha f\}(s) = \alpha \mathcal{L}\{f\}(s), \quad s > s_f.$

**Exemplo 5.5** Vamos calcular a transformada de Laplace da função cosseno hiperbólico:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\cosh(at)\}(s) &= \mathcal{L}\left\{\frac{e^{at} + e^{-at}}{2}\right\}(s) \\ &= \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{at}\}(s) + \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{-at}\}(s) \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{s-a} + \frac{1}{2}\frac{1}{s+a}, \quad s > a \text{ e } s > -a, \\ &= \frac{s}{(s-a)(s+a)}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\boxed{\mathcal{L}\{\cosh(at)\}(s) = \frac{s}{s^2 - a^2}, \quad s > |a|} \quad (a \in \mathbb{R}).$$

Do mesmo modo podemos mostrar que a transformada de Laplace da função seno hiperbólico é dada por

$$\mathcal{L}\{\sinh(at)\}(s) = \frac{a}{s^2 - a^2}, \quad s > |a| \quad (a \in \mathbb{R}).$$

**Observação 5.2** Nem toda a função admite transformada de Laplace. É o caso da função  $t \mapsto e^{t^2}$ , uma vez que o integral impróprio  $\int_0^\infty e^{-st} e^{t^2} dt$  é divergente para todo o  $s \in \mathbb{R}$ . [Verifique!]

No seguimento da observação anterior seria importante conhecer classes de funções para as quais fosse garantida a existência de transformada de Laplace. Dito de outra forma, interessa saber que tipo de propriedades asseguram a convergência do integral  $\int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$  para algum  $s \in \mathbb{R}$ . A este propósito refira-se que a convergência do integral  $\int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$  para um certo  $s = s_0$  implica a sua convergência para qualquer  $s > s_0$ .<sup>34</sup>

Atendendo ao integral impróprio envolvido na definição da transformada de Laplace, à partida deverá garantir-se a integrabilidade da função  $t \mapsto e^{-st} f(t)$  em qualquer intervalo  $[0, b]$ , com  $b > 0$ . Tal acontece, por exemplo, quando a função  $f$  é seccionalmente contínua<sup>35</sup>, o que é uma hipótese razoavelmente fraca. Além disso, para se garantir a existência (em  $\mathbb{R}$ ) do limite  $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b e^{-st} f(t) dt$  importa controlar, de alguma forma, o crescimento da função  $f$ .

### **Teorema 5.2 (Existência de transformada de Laplace)**

Seja  $f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ . Suponha-se que:

<sup>34</sup>Esta propriedade pode ser provada a partir do chamado *Critério de Dirichlet*, o qual é usado algumas vezes para concluir sobre a natureza de integrais impróprios não absolutamente convergentes (ver, por exemplo, [5, pp. 600–601]).

<sup>35</sup>Notar que este conceito já foi discutido no Capítulo 2 quando se discutiu a convergência das séries de Fourier. De acordo com a definição aí apresentada, diremos que uma função  $f$  é seccionalmente contínua em  $[0, +\infty[$  se for seccionalmente contínua em todo o intervalo  $[0, b]$ .

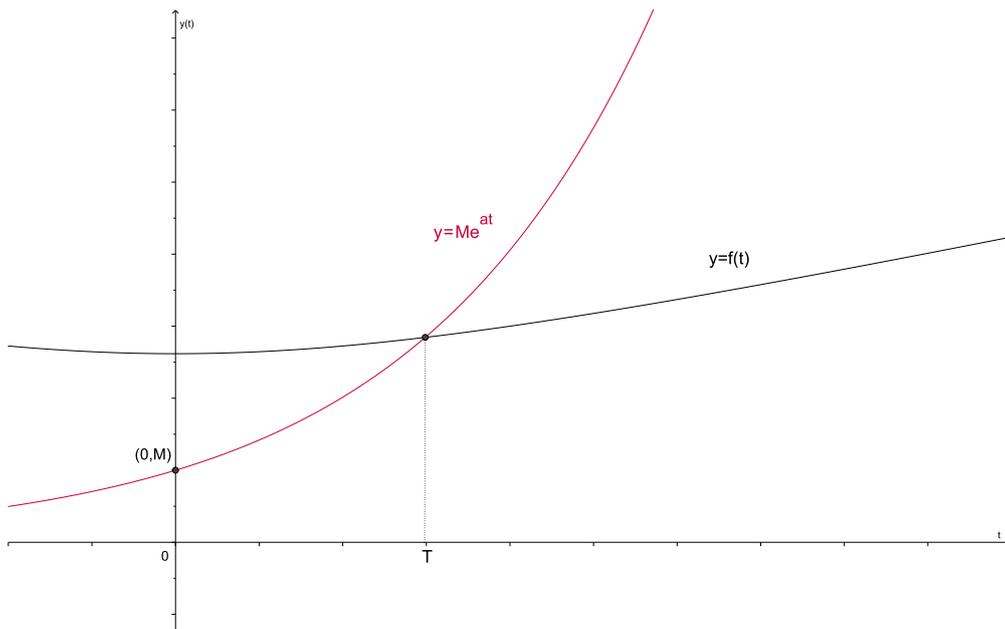
- (i)  $f$  é seccionalmente contínua em  $[0, +\infty[$ ;
- (ii) existem constantes  $M > 0$ ,  $T > 0$ ,  $a \in \mathbb{R}$  tais que

$$|f(t)| \leq M e^{at}, \quad \text{para todo } t \geq T. \quad (5.1)$$

Então  $\mathcal{L}\{f\}(s)$  existe para  $s > a$ .

**Observação 5.3** Uma função que satisfaz a propriedade expressa em (ii) do Teorema 5.2 diz-se uma **função de ordem exponencial (à direita)** (ver figura, para o caso  $a > 0$ ). Para uma tal função  $f$  tem-se necessariamente

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-st} f(t) = 0, \quad \text{para todo } s > a. \quad [\text{Porquê?}]$$



A classe das funções de ordem exponencial é razoavelmente abrangente. Tal classe contém, por exemplo, as funções limitadas e a própria exponencial

$e^{at}$ . Qualquer potência  $t^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , é também de ordem exponencial, pois  $\frac{t^n}{e^t} \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow +\infty$ . Consequentemente toda a função polinomial é de ordem exponencial. São também exemplos de funções deste tipo as funções da forma

$$t^n e^{at} \cos(bt), \quad t^n e^{at} \operatorname{sen}(bt) \quad (\text{com } a, b \text{ constantes}).$$

Note-se, no entanto, que existem funções que não são de ordem exponencial. É caso da função  $e^{t^2}$ , uma vez que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^{t^2}}{e^{at}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{t(t-a)} = +\infty$  para todo  $a \in \mathbb{R}$ .

Por comodidade e simplificação de linguagem, por vezes chamamos função de ordem exponencial  $a$  a uma função satisfazendo (5.1).

Já vimos que a transformação de Laplace goza da linearidade<sup>36</sup>, o que poderá facilitar alguns cálculos. De seguida, apresentamos mais propriedades que, como veremos, são bastante úteis no cálculo da transformada de certas funções, uma vez que permitem tirar proveito de transformadas já conhecidas.

Observando que

$$\int_0^{\infty} e^{-st} e^{\lambda t} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-\lambda)t} f(t) dt, \quad s, \lambda \in \mathbb{R},$$

facilmente se estabelece a seguinte propriedade:

### Proposição 5.2 (deslocamento na transformada)

Sejam  $f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  integrável em todo o intervalo  $[0, b]$ , com  $b > 0$ , e  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Se  $\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s)$  existe para  $s > s_f$ , então  $\mathcal{L}\{e^{\lambda t} f(t)\}(s)$  existe para  $s > \lambda + s_f$  e

$$\boxed{\mathcal{L}\{e^{\lambda t} f(t)\}(s) = F(s - \lambda)}.$$

**Exemplo 5.6** Como  $\mathcal{L}\{\cos(3t)\}(s) = \frac{s}{s^2 + 9}$  para  $s > 0$ , então

$$\mathcal{L}\{e^{-t} \cos(3t)\}(s) = \mathcal{L}\{\cos(3t)\}(s+1) = \frac{s+1}{(s+1)^2 + 9} = \frac{s+1}{s^2 + 2s + 10}, \quad s > -1.$$

<sup>36</sup>É possível provar que o conjunto das funções seccionalmente contínuas em  $[0, +\infty[$  e de ordem exponencial constitui um espaço vetorial real (com a adição e a multiplicação por um número real usuais) e que a transformada de Laplace é uma aplicação linear em tal espaço.

**Proposição 5.3 (transformada do deslocamento)**

Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  nula em  $\mathbb{R}^-$  e integrável em todo o intervalo  $[0, b]$ , com  $b > 0$ . Se  $\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s)$  existe para  $s > s_f$ , então, para todo  $a \in \mathbb{R}^+$ , também existe a transformada  $\mathcal{L}\{f(t - a)\}(s)$  para  $s > s_f$  e

$$\boxed{\mathcal{L}\{f(t - a)\}(s) = e^{-as} F(s)}.$$

**Exemplo 5.7** Considere-se

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 1, \\ (t - 1)^2 & \text{se } t \geq 1. \end{cases}$$

Temos  $f(t) = g(t - 1)$ , onde

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0, \\ t^2 & \text{se } t \geq 0. \end{cases}$$

Como  $\mathcal{L}\{g(t)\}(s) = \mathcal{L}\{t^2\}(s) = \frac{2}{s^3}$  para  $s > 0$ , então

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \mathcal{L}\{g(t - 1)\}(s) = e^{-s} \mathcal{L}\{g(t)\}(s) = \frac{2}{e^s s^3}, \quad s > 0.$$

Podemos também lidar com a transformada do deslocamento de funções  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  não necessariamente nulas em  $\mathbb{R}^-$ . Para tal considera-se a chamada *função de Heaviside* (ou função *degrau unitário*), definida por

$$H(t) := \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ 1 & \text{se } t \geq 0 \end{cases}.$$

Também se define  $H_a(t) := H(t - a)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Note-se que  $H(t)f(t)$  anula-se sempre em  $\mathbb{R}^-$  (independentemente do que acontece com  $f(t)$ ). Além disso, as transformadas de Laplace de  $H(t)f(t)$  e  $f(t)$  coincidem uma vez que  $H(t)f(t) = f(t)$  em  $\mathbb{R}_0^+$ . Assim, aplicando a Proposição 5.3 a  $H(t)f(t)$  obtém-se, para  $a > 0$ ,  $s > s_f$ ,

$$\boxed{\mathcal{L}\{H_a(t)f(t - a)\}(s) = e^{-as} F(s)}.$$

**Exemplo 5.8** Como  $\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}$  ( $s > 0$ ) temos, para  $a > 0$ ,

$$\mathcal{L}\{H_a(t)\}(s) = \mathcal{L}\{H_a(t) \cdot 1\}(s) = \frac{e^{-as}}{s}, \quad s > 0.$$

**Proposição 5.4** *Sejam  $f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  integrável em todo o intervalo  $[0, b]$ , com  $b > 0$ , e  $a \in \mathbb{R}^+$ . Se  $\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s)$  existe para  $s > s_f$ , então  $\mathcal{L}\{f(at)\}(s)$  existe para  $s > as_f$  e*

$$\mathcal{L}\{f(at)\}(s) = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right).$$

**Exemplo 5.9** Já sabemos que  $\mathcal{L}\{\text{sen}(2t)\}(s) = \frac{2}{s^2 + 4}$ ,  $s > 0$ . A propriedade anterior permite chegar ao mesmo resultado a partir da transformada da função seno:

$$\mathcal{L}\{\text{sen}(2t)\}(s) = \frac{1}{2} \mathcal{L}\{\text{sen } t\}\left(\frac{s}{2}\right) = \frac{1}{2} \frac{1}{(s/2)^2 + 1} = \frac{2}{s^2 + 4}, \quad s > 0.$$

Tal como anunciado anteriormente, estamos particularmente interessados em usar a transformada de Laplace na resolução de certos problemas envolvendo derivadas. Portanto, importa ver como é que aquela transformada se relaciona com a derivação.

### Proposição 5.5 (derivada da transformada)

*Seja  $f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  seccionalmente contínua e de ordem exponencial  $s_f$  (i.e., tomando aqui  $s_f$  no lugar do  $a$  que aparece na definição de função de ordem exponencial, cf. Observação 5.3). Então, para todo  $n \in \mathbb{N}_0$ , existe a transformada  $\mathcal{L}\{t^n f(t)\}(s)$  para  $s > s_f$  e*

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\}(s) = (-1)^n F^{(n)}(s).$$

onde  $F^{(n)}$  denota a derivada de ordem  $n$  da função  $F$ .

**Exemplo 5.10** Como  $F(s) = \mathcal{L}\{\text{sen}(2t)\}(s) = \frac{2}{s^2 + 4}$  para  $s > 0$ , então

$$\mathcal{L}\{t \text{sen}(2t)\}(s) = -F'(s) = -\left(\frac{2}{s^2 + 4}\right)' = \frac{4s}{(s^2 + 4)^2}, \quad s > 0.$$

**Observação 5.4** A fórmula anterior permite, por exemplo, calcular a transformada de Laplace de qualquer potência  $t^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) a partir da transformada da função constante igual a 1 (calculada no Exemplo 5.2):

$$\mathcal{L}\{t^n\}(s) = \mathcal{L}\{t^n \cdot 1\}(s) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \left( \frac{1}{s} \right) = (-1)^n \frac{(-1)^n n!}{s^{n+1}} = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0.$$

**Proposição 5.6 (transformada da derivada)**

Suponha-se que as funções  $f, f', f'', \dots, f^{(n-1)}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) são todas de ordem exponencial  $s_0$ , para algum  $s_0 \in \mathbb{R}$ , e que  $f^{(n)}$  existe e é seccionalmente contínua em  $[0, +\infty[$ . Então existe  $\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}(s)$  para  $s > s_0$  e

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}(s) = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

Fica agora claro o significado da afirmação inicial sobre o facto da transformada de Laplace converter, de alguma forma, derivadas em polinómios.

**Exemplo 5.11** Vamos calcular  $F(s) = \mathcal{L}\{\cos^2 t\}(s)$ .

Como  $(\cos^2 t)' = -\sin(2t)$ , então

$$-\mathcal{L}\{\sin(2t)\}(s) = \mathcal{L}\left\{(\cos^2 t)'\right\}(s) = s\mathcal{L}\{\cos^2 t\}(s) - \cos^2(0) = sF(s) - 1$$

para  $s > 0$ . Portanto,

$$F(s) = \frac{1}{s}(1 - \mathcal{L}\{\sin(2t)\}(s)) = \frac{s^2 + 2}{s(s^2 + 4)}, \quad s > 0.$$

Considere-se o seguinte problema de valores iniciais (o qual possui uma única solução, cf. Teorema 4.6):

Determinar  $y = y(t)$  tal que

$$y'' + 2y' + 10y = 1, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0. \quad (5.2)$$

Seja  $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s)$  (assumindo que a função  $y$  admite transformada de Laplace). Usando a fórmula dada na Proposição 5.6, temos

$$\mathcal{L}\{y'(t)\}(s) = sY(s) - y(0) = sY(s)$$

e

$$\mathcal{L}\{y''(t)\}(s) = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2Y(s).$$

Aplicando a transformada de Laplace a ambos os membros da equação dada em (5.2), obtemos

$$s^2Y(s) + 2sY(s) + 10Y(s) = \mathcal{L}\{1\}(s). \quad [\text{Porquê?}]$$

Daqui resulta que

$$(s^2 + 2s + 10)Y(s) = \frac{1}{s} \quad \text{i.e.,} \quad Y(s) = \frac{1}{s(s^2 + 2s + 10)} \quad (s > 0).$$

É claro que o problema anterior ainda não está resolvido. Relativamente à função  $y = y(t)$  que procuramos, de momento apenas conhecemos a sua transformada de Laplace. Assim, seria importante considerar uma “transformação inversa” por forma a recuperar a função original. Voltaremos então ao nosso problema assim que esclarecermos a questão da inversão da transformada de Laplace.

## 5.2 Transformada de Laplace inversa

Dada uma transformada de Laplace  $F(s)$  interessa determinar “a” função  $f$  (definida em  $\mathbb{R}_0^+$ ) tal que  $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ . Tal  $f$ , caso exista, chama-se **transformada de Laplace inversa** de  $F$  e escreve-se

$$f = \mathcal{L}^{-1}\{F\} \quad \text{ou} \quad f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t).$$

Mas veja-se o que acontece com a função constante igual a 1 e com a função do Exemplo 5.3. Ambas as funções têm a mesma transformada de Laplace  $\frac{1}{s}$ , pelo que se coloca uma ambiguidade ao considerar  $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s}\}$ . O problema pode ser resolvido se escolhermos para transformada inversa a função contínua:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}(t) = 1, \quad t \geq 0.$$

A escolha anterior é justificada pelo facto de não existirem funções contínuas diferentes com a mesma transformada de Laplace.

**Teorema 5.3** *Sejam  $f$  e  $g$  funções seccionalmente contínuas em  $[0, +\infty[$  tais que*

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s) = \mathcal{L}\{g\}(s), \quad \text{para } s > \alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

*Se  $f$  e  $g$  são contínuas no ponto  $t \in \mathbb{R}^+$ , então  $f(t) = g(t)$ .*

**Observação 5.5** Antes do problema da unicidade poderia colocar-se a questão da própria existência de transformada inversa. É possível indicar condições “necessárias” para que uma dada função seja uma transformada de Laplace. Na verdade, é possível provar que se uma função  $f$  é seccionalmente contínua em  $[0, +\infty[$  e de ordem exponencial, então

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \mathcal{L}\{f\}(s) = 0.$$

Antes de calcularmos algumas transformadas inversas, registamos duas propriedades que podem ser provadas sem grande dificuldade.

**Proposição 5.7 (linearidade da transformada inversa)**

*Suponha-se que  $F$  e  $G$  (definidas num mesmo domínio) admitem transformada de Laplace inversa. Então as funções  $F + G$  e  $\alpha F$  ( $\alpha \in \mathbb{R}$ ) também admitem transformada inversa e*

$$(i) \quad \mathcal{L}^{-1}\{F + G\} = \mathcal{L}^{-1}\{F\} + \mathcal{L}^{-1}\{G\};$$

$$(ii) \quad \mathcal{L}^{-1}\{\alpha F\} = \alpha \mathcal{L}^{-1}\{F\}.$$

**Exemplo 5.12** Vamos calcular a transformada inversa da função  $\frac{e^{-s}}{s(s+1)}$ .

Lembrando que  $\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}$  e  $\mathcal{L}\{e^{-t}\} = \frac{1}{s+1}$ , temos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{s(s+1)}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-s}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right)\right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-s} \cdot \frac{1}{s}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-s} \cdot \frac{1}{s+1}\right\} \\ &= H_1(t) - H_1(t)e^{-(t-1)} \end{aligned}$$

**Proposição 5.8**

Se  $F$  admite transformada de Laplace inversa, então  $F(s-\lambda)$  também admite transformada inversa para todo  $\lambda \in \mathbb{R}$  e

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s-\lambda)\} = e^{\lambda t} \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$$

**Exemplo 5.13** Como  $\mathcal{L}\{t^2\} = \frac{2}{s^3}$  para  $s > 0$ , temos [Justifique!]:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{(s-2)^3}\right\} = \frac{3}{2} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s-2)^3}\right\} = \frac{3}{2} e^{2t} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^3}\right\} = \frac{3}{2} e^{2t} t^2, \quad t \geq 0.$$

Se observarmos as transformadas de Laplace já calculadas, constatamos que, em geral, estas são dadas por funções racionais (em  $s$ ) em que o grau do polinómio do numerador é inferior ao grau do polinómio do denominador. A ideia passa então por decompor tais fracções em *fracções simples*<sup>37</sup>. Vamos ilustrar tal facto no âmbito da resolução do problema indicado em (5.2). A este respeito, já vimos que a transformada de Laplace da função  $y = y(t)$  que procuramos é dada por

$$Y(s) = \frac{1}{s(s^2 + 2s + 10)}, \quad s > 0.$$

Decompondo o lado direito em fracções simples, obtemos

$$Y(s) = \frac{1}{10} \frac{1}{s} - \frac{1}{10} \frac{s+2}{s^2 + 2s + 10}, \quad s > 0. \quad [\text{Verifique!}]$$

Assim, a solução do problema pode ser determinada do seguinte modo:

$$\begin{aligned} y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} &= \frac{1}{10} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \frac{1}{10} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+2}{(s+1)^2 + 9}\right\} \\ &= \frac{1}{10} - \frac{1}{10} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{(s+1)^2 + 9} + \frac{1}{(s+1)^2 + 9}\right\} \\ &= \frac{1}{10} - \frac{1}{10} e^{-t} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 + 9}\right\} - \frac{1}{10} e^{-t} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + 9}\right\} \\ &= \frac{1}{10} - \frac{1}{10} e^{-t} \cos(3t) - \frac{1}{30} e^{-t} \text{sen}(3t), \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

<sup>37</sup>A decomposição em fracções simples já foi discutida em Cálculo I quando se tratou a primitivação de funções racionais.

Terminamos este capítulo com uma referência à convolução de funções, operação que é bastante útil em certas aplicações. Define-se o *produto de convolução* de duas funções  $f$  e  $g$  por

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau) d\tau, \quad t \geq 0$$

(desde que aquele integral exista). Usando uma mudança de variável apropriada ( $u = t - \tau$ , com  $t$  fixo), podemos verificar que  $f * g = g * f$  (*i.e.*, a operação de convolução é comutativa).

Uma das propriedades interessantes da transformada de Laplace reside no facto de transformar o produto de convolução num produto usual de funções. Mais precisamente, vale o seguinte resultado:

**Proposição 5.9 (transformada da convolução)**

Se  $f$  e  $g$  são funções seccionalmente contínuas em  $[0, +\infty[$  e ambas de ordem exponencial  $s_0$ , para algum  $s_0 \in \mathbb{R}$ , então, para  $s > s_0$ , tem-se

$$\mathcal{L}\{(f * g)(t)\}(s) = F(s)G(s)$$

(onde  $F(s)$  e  $G(s)$  denotam as transformadas de Laplace das funções  $f(t)$  e  $g(t)$ , respetivamente).

Com  $f$  nas mesmas condições da Proposição 5.9, para  $s > \max\{0, s_0\}$  temos

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau) d\tau\right\}(s) = \frac{F(s)}{s}$$

Note-se que a convolução pode ser usada para determinar transformadas inversas, tendo em conta a fórmula

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} = (f * g)(t)$$

**Exemplo 5.14** Recordando as transformadas do seno e do cosseno e a fórmula anterior para a convolução, temos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+1)^2}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1} \cdot \frac{s}{s^2+1}\right\} \\ &= (\text{sen} * \text{cos})(t) \\ &= \int_0^t \text{sen}\tau \cos(t-\tau) d\tau \\ &= \int_0^t \text{sen}\tau (\cos t \cos \tau + \text{sen}\tau \text{sent}) d\tau \\ &= \frac{t \text{sent}}{2}.\end{aligned}$$

## Referências

- [1] D. Almeida *et al.*, *Análise Matemática: Unidades teórico-práticas*, Universidade de Aveiro, 2010.
- [2] T.M. Apostol, *Cálculo* (Vol. I, 2ª Ed.), Editorial Reverté, Barcelona, 2004.
- [3] A. Caetano, Notas manuscritas de Análise Matemática II (2006-2007).
- [4] A. Caetano, Cálculo I e II (agrupamento 4), Universidade de Aveiro, <http://calculowikidot.com>
- [5] J. Campos Ferreira, *Introdução à Análise Matemática*, Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa, 1993.
- [6] R. Courant, J. Fritz, *Introduction to Calculus and Analysis*, Springer, Berlin, 2000.
- [7] F.R. Dias Agudo, *Análise Real* (Vol. I e III), Escolar Editora, 1989 e 1992.
- [8] S. Lang, *A First Course in Calculus*, Springer, N.Y., 1986.
- [9] V. Neves, *Análise Matemática II* (apontamentos do ano letivo 2005/06).
- [10] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill, N.Y., 1976.
- [11] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, N.Y., 1987.
- [12] V. Santos, *Cálculo com funções de uma variável, 2009/10*. Apontamentos disponíveis na plataforma Moodle da UA.
- [13] J. Sousa Pinto, *Curso de Análise Matemática*, Universidade de Aveiro, 2010.
- [14] J. Stewart, *Cálculo* (Vol. II), Pioneira Thomson Learning, S. Paulo, 2001.
- [15] W.F. Trench, *Introduction to Real Analysis*, 2009.