Cálculo I (Ag. 4) — Teste 1 — Nov 2022 — Resolução 2.b)

$$\int \frac{1}{x^4-1}\,dx = \int \frac{1}{(x^2-1)(x^2+1)}\,dx = \int \frac{1}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}\,dx$$

O denominador ficou fatorizado em fatores irredutíveis já que $x^2+1=0 \Leftrightarrow x=\pm i$ (par de raízes complexas conjugadas).

A decomposição em frações simples é da forma:

$$\frac{1}{x^4-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Mx+N}{x^2+1},$$ com $A, B, M, N \in \mathbb{R}$ a calcular pelo método dos coef. indeterminados.

Esta igualdade implica que:

$$\boxed{1 = A(x+1)(x^2+1) + B(x-1)(x^2+1) + (Mx+N)(x^2-1)} \text{ — (F)}$$

$$1 = (A+B+M)x^3 + (A-B+N)x^2 + (A+B-M)x + (A-B-N)$$

$$\begin{cases} A+B+M = 0 \\ A-B+N = 0 \\ A+B-M = 0 \\ A-B-N = 1 \end{cases}$$

- Se em (F) fizermos $x=1$:
  $1 = A(1+1)(1+1) \Leftrightarrow A = 1/4$.
- Se em (F) fizermos $x=-1$:
  $1 = B(-1-1)(1+1) \Leftrightarrow B = -\frac{1}{4}$.

- Como $A+B=0$, do sistema sai $M=0$.
- Como $A-B=\frac{1}{2}$, do sistema sai $N=-1/2$.

Obtemos, pela propriedade da linearidade

$$\int \frac{1}{x^4-1}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{x-1}\,dx - \frac{1}{4}\int \frac{1}{x+1}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln|x+1| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C,$$

$C \in \mathbb{R}$ em intervalos contidos no domínio

$$\mathcal{D} =]-\infty,-1[\,\cup\,]-1,1[\,\cup\,]1,+\infty[$$

onde a função integranda está definida.

NOTA: A fatorização do denominador podia fazer-se pela Regra de Ruffini. O cálculo de A, B, M e N também podia ser feito doutras formas.