Universidade de Aveiro
Departamento de Matemática

Cálculo I — Agrupamento 4 2019/2020

Ficha de Exercícios 1
Complementos de funções reais de variável real
(Funções trigonométricas inversas, Teoremas de Weierstrass, Rolle, Lagrange e Cauchy, Regra de Cauchy, contradomínios e extremos)

1. Em cada uma das alíneas que se seguem, determine a inversa da função considerada, indicando também o seu contradomínio.

   (a) f definida por $f(x) = \frac{1}{x+1}$;
   (b) f definida por $f(x) = 2 + e^{x+1}$;
   (c) f definida por $f(x) = \log_3(2-x)$;
   (d) f definida por $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$.

2. Considere as funções f e g de domínio $\mathbf{R}$ tais que

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \text{ e } g(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \,,$$

   estas funções são as chamadas *seno hiperbólico* e *cosseno hiperbólico* e as suas notações usuais são $\operatorname{senh}(x)$ e $\cosh(x)$, respetivamente.

   (a) Mostre que, para todo o $x \in \mathbb{R}$:
      i. $(\operatorname{senh}(x))' = \cosh(x)$;
      ii. $(\cosh(x))' = \operatorname{senh}(x)$.

   (b) Mostre que a função seno hiperbólico é invertível e determine a sua inversa.

   (c) Justifique que a função cosseno hiperbólico (definida em $\mathbb{R}$) não é invertível. Identifique uma sua restrição invertível (considerando o "maior" domínio possível) e determine o domínio dessa inversa.

3. Calcule:

   (a) $\operatorname{sen}(\arccos(-\frac{1}{2}))$
   (b) $\arccos(\cos(\frac{3\pi}{2}))$
   (c) $\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen}(-\frac{1}{2}))$
   (d) $\cos(\operatorname{arcsen}(-\frac{1}{2}))$
   (e) $\operatorname{cotg}(\operatorname{arcsen}(\frac{12}{13}))$
   (f) $\cos(2 \cdot \operatorname{arctg}(\frac{4}{3}))$
   (g) $\operatorname{arccotg}(\operatorname{cotg}(\frac{1}{2}))$
   (h) $\operatorname{arccotg}(\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}))$
   (i) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(\pi))$

4. Em cada uma das alíneas seguintes, defina a função inversa de f e indique o seu contradomínio. Considere as correspondentes restrições principais das funções trigonométricas envolvidas.

   (a) $f(x) = \frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$;
   (b) $f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{2\operatorname{arcsen}(1-x)}{3}$;
   (c) $f(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2-x}\right)$;
   (d) $f(x) = 3\arccos(\sqrt{x+4}) - \frac{\pi}{2}$;
   (e) $f(x) = \pi - 3\operatorname{arctg}\left(\frac{x-1}{2}\right)$;
   (f) $f(x) = \operatorname{arccotg}(\ln(x+1))$.

5. Considere a função f definida por $f(x) = 5x^7 + 6x^3 + x + 9$. Sabendo que $f(-1) = -3$ e que f é invertível, determine $(f^{-1})'(-3)$.

6. Considere a função f definida por $f(x) = 4x^3 + x + 2$. Sabendo que f é invertível, determine $(f^{-1})'(2)$.

7. Sejam f e g duas funções reais de variável real definidas por $f(x) = x^3$ e $g(x) = \cos x$. Determine, utilizando o teorema da derivada da função inversa, as derivadas seguintes:
   (a) $(f^{-1})'(x)$, para $x \in \mathbb{R}^+$;
   (b) $(g^{-1})'(0)$.

8. Em cada uma das alíneas que se seguem, determine a função derivada da função considerada.
   (a) $f(x) = \sqrt[3]{(2x-1)^2}$;
   (b) $f(x) = x^2 \mathrm{e}^{x^2}$;
   (c) $f(x) = \cos(\log_2(x^2))$;
   (d) $f(x) = (1-x^2)\ln x$;
   (e) $f(x) = (1+x^2)\,\mathrm{arctg}\, x$;
   (f) $f(x) = \mathrm{arcsen}\sqrt{x}$.

9. Calcule $f'(x)$:
   (a) $f(x) = \mathrm{arccotg}\,(\mathrm{sen}\,(4x^3))$;
   (b) $f(x) = \mathrm{arcsen}\,\frac{1}{x^2}$;
   (c) $f(x) = \arccos(1-e^x)$;
   (d) $f(x) = \mathrm{arctg}(1+\ln x)$.

10. Considere $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} -x+1 & se \quad x < 0 \\ x+2 & se \quad x \geq 0 \end{cases}$.
    (a) Estude a continuidade de f.
    (b) Mostre que a função f não tem mínimo global em $[-1, 1]$, determinando o seu contradomínio.
    (c) A não existência de mínimo global de f em $[-1, 1]$ não contradiz o Teorema de Weierstrass. Porquê?

11. Sendo $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$, $x \in \mathbb{R}$, mostre que f possui exatamente um zero no intervalo $]1, 3]$.

12. Mostre que se $a > 0$ a equação $x^3 + ax + b = 0$ não pode ter mais que uma raiz real, qualquer que seja $b \in \mathbb{R}$.

13. Prove que a equação $4x^3 - 6x^2 + 1 = 0$ tem 3 zeros distintos e localize-os em intervalos de $\mathbb{R}$ cujos extremos sejam números inteiros consecutivos.

14. Considere a função polinomial p definida por $p(x) = x(x+1)(x+2)(x+3)$. Prove que a equação $p'(x) = 0$ tem exatamente três soluções reais distintas.

15. Considere a função f definida em $\mathbb{R}_0^+$ por $f(x) = \ln(1+x) - x$. Mostre que f é decrescente e diga, justificando se é verdadeira ou falsa a seguinte afirmação: $f(x) < 0$, para todo o $x \in \mathbb{R}^+$.

16. Prove que:
    (a) para todo o $x \in]0, 1]$ se tem $\mathrm{arcsen}\, x > x$;
    (b) para todo o $x \geq 0$ se tem $\mathrm{sen}\, x \leq x$;
    (c) para todo o $x > 0$ se tem $\ln x < x$.

17. Considere a função f definida por $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$. Estude f quanto à monotonia e existência de extremos globais.

18. Verifique que $x = 0$ é um extremante local da f.r.v.r. definida por $h(x) = 2x^5 - x^3 + x^2 + 5$. Classifique-o e calcule o respetivo extremo local.

19. Sejam f e g funções diferenciáveis em $\mathbb{R}$ tais que $f'(x) > g'(x)$, para todo o $x \in \mathbb{R}$ e $f(a) = g(a)$. Prove que:

    (a) $f(x) > g(x)$, para todo o $x > a$;

    (b) $f(x) < g(x)$, para todo o $x < a$.

20. Seja f uma função real de variável real. Mostre que se f admite terceira derivada no intervalo $[a, b]$ e $f(a) = f(b) = f'(a) = f'(b) = 0$, então existe $c \in]a, b[$ tal que $f'''(c) = 0$.

21. Mostre que existe $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x + \operatorname{sen} x}$, mas que não se pode aplicar a regra de Cauchy no seu cálculo .

22. Calcule, caso exista, o limite considerado em cada uma das alíneas que se seguem:

    (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{x}{3}}{x^2}$;

    (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1} - x}{x}$;

    (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2 \operatorname{arcsen} x}{3x}$;

    (d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x \operatorname{sen} x}$;

    (e) $\displaystyle\lim_{x\to -\pi/4} \frac{\cos(2x)}{1 + \operatorname{cotg} x}$;

    (f) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^p}$ com $p \in \mathbb{R}^+$;

    (g) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{1 - x}{\ln(2 - x)}$;

    (h) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} - x \right)$;

    (i) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg}\,(2x)}$;

    (j) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x+3}{x-1} \right)^{x+3}$;

    (k) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (\ln(3x^2 + 2) - \ln(x^2))$;

    (l) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x} \right)^x$;

    (m) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{\ln x}}$;

    (n) $\displaystyle\lim_{x\to 0} (\cos(2x))^{\frac{1}{x^2}}$;

    (o) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{x}}$.

23. Seja f uma função real de variável real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x \ln x & \text{se } x > 0 \\ \operatorname{sen}(x) + 5x & \text{se } x \leq 0 \end{cases} .$$

    (a) Estude f quanto à continuidade.

    (b) Averigue se a função f é diferenciável para $x = 0$.

    (c) Mostre que o Teorema de Rolle é aplicável à função f no intervalo $[0, 1]$. Determine o(s) ponto(s) b do interior desse intervalo tais que $f'(b) = 0$.

    (d) f tem extremos globais em $[-\pi, 1]$? Justifique. Caso existam, calcule-os e classifique-os.

24. [1] Considere a função $f : [0, e] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+(\ln x)^2} & se \quad x \in]0, e] \\ 0 & se \quad x = 0 \, . \end{cases}$

    (a) Estude f quanto à continuidade.

    (b) Calcule, caso exista, $f'_+(0)$.

    (c) Estude a função quanto à existência de extremos absolutos. Caso existam, calcule-os e classifique-os.

    (d) Identifique o contradomínio de f. Justifique.

[1] A partir deste exercício, são retomados tópicos já abordados em exercícios anteriores. A maioria dos exercícios foram retirados de provas de avaliação de Cálculo I realizadas em anos anteriores.

25. Considere a função f definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}(x^2) & se \quad x \leq 0 \\ \\ \ln(1+x) & se \quad x > 0. \end{cases}$

   (a) Estude f quanto à continuidade em $x = 0$.
   (b) Estude f quanto à diferenciabilidade em $x = 0$.
   (c) Estude f quanto à existência de extremos locais.
   (d) Mostre que existe pelo menos um $\theta \in]-1, 0[$ tal que $f'(\theta) = -\frac{\pi}{4}$.
   (e) Mostre que a equação $f(x) = 1 - x^2$ possui exatamente uma solução em $]-1, 0[$.
   (f) Considere a função g definida em $\mathbb{R}_0^-$ por $g(x) = f(x)$. Justifique que g é invertível e determine a função inversa de g indicando o domínio, o contradomínio e a expressão analítica que a define.

26. Verifique que $x = 1$ é solução da equação $\mathrm{e}^{x-1} = x$ e que esta equação não pode ter outra raiz real.

27. Considere a função f definida pela expressão analítica $f(x) = \operatorname{arcsen}(1-x) + \sqrt{2x - x^2}$.

   (a) Determine o domínio de f.
   (b) Mostre que $f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{2x-x^2}}$.
   (c) Justifique que f atinge um máximo global y_M e um mínimo global y_m. Determine também esses valores.
   (d) Determine o contradomínio de f.

28. (a) Utilizando o Teorema de Lagrange, mostre que se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua em $[a, b]$, diferenciável em $]a, b[$ e tal que $f'(x) = 0$, para todo o $x \in]a, b[$, então f é constante em $[a, b]$.
   (b) Prove que sendo $f(x) = \operatorname{arcsen}(x) + \arccos(x)$, então $f(x) = \frac{\pi}{2}, \forall x \in [-1, 1]$ (Sugestão: use a alínea anterior).

29. Seja h uma função de domínio $\mathbb{R}$ tal que $h(0) = 0$ e $h'(x) = \cos x \cdot e^{\operatorname{sen}^2 x}$. Usando o Teorema de Lagrange, mostre que $h(x) \leq e \cdot x$, para todo o $x \in \mathbb{R}^+$.

30. Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ e h a função definida por $h(x) = \alpha \operatorname{arcsen}(x^2 - 1) + x^2 - \frac{\pi}{2}x$.

   (a) Determine o domínio de h.
   (b) Mostre que a função h tem pelo menos um zero no intervalo $]-1, 1[$, qualquer que seja o valor do parâmetro α.

31. Calcule o limite $\lim\limits_{x \to 0^+} (1 + \operatorname{arcsen}(x^2))^{\frac{1}{x}}$.

32. Seja $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ a função real de variável real definida por

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}} + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right).$$

   Estude f quanto à monotonia e existência de extremos locais.

33. Considere a função real $N(t)$, de domínio $\mathbb{R}_0^+ = [0, +\infty[$, definida por

$$N(t) = a\, e^{-kt}, \text{ onde } a \text{ e } k \text{ são parâmetros(constantes) reais positivos.}$$

A função $N(t)$ é frequentemente usada como modelo do decaimento radioativo de uma substância radioativa. Onde $N(t)$ representa o número de átomos radioativos no instante t, contado em anos, numa amostra de determinado radioisótopo. O parâmetro k é a chamada constante de desintegração.

(a) Estude N quanto à monotonia.

(b) Verifique se N tem extremos absolutos e, em caso afirmativo, identifique-os e indique os respetivos extremantes.

(c) Determine o contradomínio de N.

(d) Sabendo que para determinada substância $k = 10^{-10} \ln(4)$, calcule a sua meia-vida, isto é, calcule o instante de tempo em que o número de átomos radioativos numa amostra é metade do número de átomos radioativos no instante inicial de tempo.