Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

CÁLCULO II - Agrupamento 4 — 5 de julho de 2021

2.º Teste de Avaliação Discreta — Duração: 2h

N.º: ....Nome: ....

Curso: .... N.º de folhas suplementares entregues na Questão 1: ......

O teste é composto por 6 (seis) questões que devem ser respondidas em folhas separadas.
O formulário encontra-se no verso da folha da Questão 6.
Justifique todas as respostas de forma clara e concisa.

Questão 1

1. [25] Determine e classifique os pontos críticos da função $g(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

Temos $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 3y$ e $\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 3y^2 - 3x$ para todo o $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Os pontos críticos de g são os pontos que anulam o vetor gradiente:

$$\nabla g(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x^4 - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{———} \\ x(x^3-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cancel{y = x^2} \\ x = 0 \vee x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y = 1 \\ x = 1 \end{cases}.$$

Assim, a função g possui dois pontos críticos: $(0,0)$ e $(1,1)$.

<u>Classificação dos pontos críticos</u>: temos

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) = 6x \; ; \; \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) = 6y \; ; \; \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x,y) = -3 = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(x,y).$$

A matriz Hessiana de g é a matriz $H_g(x,y) = \begin{bmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{bmatrix}$.

Como $\det(H_g(0,0)) = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = -9 < 0$,

então $(0,0)$ é ponto de sela de g.

Como $\det(H_g(1,1)) = \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 36 - 9 = 27 > 0$ e

$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(1,1) = 6 > 0$, então $(1,1)$ é minimizante local de g.

N.º: .... Nome: ....

N.º de folhas suplementares entregues na Questão 2: ....

Questão 2

2. **[25]** Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x^2 - y^2 + x^3$.
Justifique que f possui extremos absolutos na circunferência de equação $x^2 + y^2 = 1$ e determine tais extremos.

Denotemos por $\mathcal{C}$ a circunferência de equação $x^2+y^2=1$. Como f é contínua em $\mathcal{C}$ (trata-se de uma função polinomial) e o conjunto $\mathcal{C}$ é limitado (por estar contido numa bola, por exemplo, na bola $B_2((0,0))$) e fechado (por conter todos os seus pontos fronteiros), então o Teorema de Weierstrass garante que f tem máximo e mínimo em $\mathcal{C}$.

Seja $g(x,y) = x^2+y^2$. Então $\nabla g(x,y) = (2x,2y) \neq \vec{0}$ para todo o $(x,y) \in \mathcal{C}$. Assim, os ~~candida~~ pontos (x,y) candidatos a extremantes (absolutos) são solução do sistema $\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \\ g(x,y) = 1 \end{cases}$ (para certo multiplicador $\lambda \in \mathbb{R}$).

Temos $\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \\ g(x,y) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3x^2 = \lambda 2x \\ -2y = \lambda 2y \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ y(1+\lambda)=0 \\ \text{---} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3 = 2\lambda x \\ y=0 \\ x^2=1 \end{cases} \vee \begin{cases} 2x+3x^2=-2x \\ \lambda=-1 \\ \text{---} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda=\frac{5}{2} \\ y=0 \\ x=1 \end{cases} \vee \begin{cases} \lambda=-\frac{1}{2} \\ y=0 \\ x=-1 \end{cases} \vee \begin{cases} x(4+3x)=0 \\ \text{---} \\ \text{---} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda=\frac{5}{2} \\ y=0 \\ x=1 \end{cases} \vee \begin{cases} \lambda=-\frac{1}{2} \\ y=0 \\ x=-1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=0 \\ \lambda=-1 \\ y=-1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=0 \\ \lambda=-1 \\ y=1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-\frac{4}{3} \\ \lambda=-1 \\ \underbrace{\left(-\frac{4}{3}\right)^2+y^2=1}_{\text{imp.}} \end{cases}$

$\longrightarrow$ continua

Dos cálculos anteriores resultam 4 candidatos a extremantes : $(1,0)$; $(-1,0)$; $(0,1)$; $(0,-1)$.

Como

$$f(1,0) = 2$$

$$f(-1,0) = 0$$

$$f(0,1) = -1$$

$$f(0,-1) = -1,$$

então $f(1,0) = 2$ é o máximo de f em $\mathcal{C}$ e $f(0,\pm 1) = -1$ é o mínimo de f em $\mathcal{C}$.

<u>Alternativa</u> : Parametrizar a circunferência e reduzir o problema ao estudo de uma função de uma variável (c.f. slides 15, 16 do Cap. 3, parte 2).

N.º: .... Nome: ....

N.º de folhas suplementares entregues na Questão 3: ....

Questão 3

3. [35] Resolva as seguintes equações diferenciais:

   (a) $y' = x\, e^{x^2-y}$;

   (b) $2ye^{2x} + (e^{2x} - y)\dfrac{dy}{dx} = 0$.

(a) $y' = x\, e^{x^2-y} \longrightarrow$ EDO de variáveis separáveis.

$$\Leftrightarrow e^{y}\,\frac{dy}{dx} = x\,e^{x^2}$$

$$\Leftrightarrow \int e^{y}\,dy = \int x\,e^{x^2}\,dx$$

$$\Leftrightarrow e^{y} = \frac{1}{2}e^{x^2} + c$$

$$\Leftrightarrow y = \ln\left(\frac{e^{x^2}}{2} + c\right), \text{ com } c \in \mathbb{R} \text{ e } \frac{x^2}{2} + c > 0.$$

(b) $2y\,e^{2x} + (e^{2x} - y)\dfrac{dy}{dx} = 0 \Longleftrightarrow 2y\,e^{2x}dx + (e^{2x} - y)dy = 0$

Sejam $M(x,y) = 2y\,e^{2x}$; $N(x,y) = e^{2x} - y$.

Como M e N são funções de classe C^1 {no aberto e simplesmente conexo $\mathbb{R}^2$} e

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = 2\,e^{2x} = \frac{\partial N}{\partial x}(x,y), \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

então a EDO dada é exata. Assim, existe $F(x,y)$ tal que

(i) $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y) = 2y\,e^{2x}$ e (ii) $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y) = e^{2x} - y$.

(i) $\Rightarrow F(x,y) = y\,e^{2x} + h(y)$ (h depende apenas de y).

(ii) $\Rightarrow \dfrac{\partial}{\partial y}\left(y\,e^{2x} + h(y)\right) = e^{2x} - y$,

(continua)

ou seja,

$$e^{2x} + h'(y) = e^{2x} - y \iff$$

$$\iff h'(y) = -y \iff h(y) = -\frac{y^2}{2} + K\ , \quad K \in \mathbb{R}.$$
(iii)

Portanto, as funções F são da forma (recordar (iii))

$$F(x,y) = y\,e^{2x} - \frac{y^2}{2} + K.$$

Assim, as soluções da EDO são dadas por

$$y\,e^{2x} - \frac{y^2}{2} = C\ , \quad C \in \mathbb{R}.$$

N.º: .... Nome: ....

N.º de folhas suplementares entregues na Questão 4: ....

Questão 4

4. [30] Determine um integral geral na forma explícita para a equação diferencial

$$2xyy' = x^2 + 3y^2, \quad x > 0,\ y < 0.$$

(**Sugestão:** Considere a mudança de variável $y = zx$)

Para $x>0$, $y<0$, a EDO dada é equivalente a

$$y' = \frac{x^2+3y^2}{2xy} \Leftrightarrow y' = \frac{x}{2y} + \frac{3y}{2x} \quad \text{(EDO homogénea)}.$$

Com a mudança de variável $y = zx$, temos $y' = z'x + z$, pelo que a EDO anterior converte-se numa EDO de variáveis separáveis (em x e z):

$$z'x + z = \frac{1}{2z} + \frac{3}{2}z$$

$$\Leftrightarrow z'x = \frac{1}{2z} + \frac{z}{2} \Leftrightarrow z'x = \frac{1+z^2}{2z}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2z}{1+z^2}\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \int \frac{2z}{1+z^2}\,dz = \int \frac{1}{x}\,dx$$

$$\Leftrightarrow \ln(1+z^2) = \ln x + K, \quad K \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow 1+z^2 = x \cdot e^K = c$$

Como $y = zx \Leftrightarrow z = \frac{y}{x}$, obtemos

$$1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 = cx, \quad \text{com } c = e^K > 0.$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = cx^3$$

$$\Leftrightarrow y^2 = x^2(cx-1).$$

Sendo $y<0$ e $x>0$, obtemos

$$y = -\sqrt{x^2(cx-1)} \Leftrightarrow y = -x\sqrt{cx-1},$$

com $c>0$, $cx-1 \geq 0$.

Alternativa: Efetuar a substituição $z = y^2$ (a EDO também é de Bernoulli)

N.º: .... Nome: ....

N.º de folhas suplementares entregues na Questão 5: ....

Questão 5

5. [70] Considere o seguinte problema de valores iniciais (PVI):

$$y'' + 5y' + 4y = e^{-t}, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

(a) Determine a solução do PVI começando por resolver a equação diferencial pelo método dos coeficientes indeterminados. (M.C.I.)

(b) Resolva o mesmo PVI usando agora transformadas de Laplace.

(a) $y'' + 5y' + 4y = e^{-t}$ (EDO linear completa de 2ª ordem, de coeficientes constantes).

- Resolução da EDO homogénea associada: $y'' + 5y' + 4y = 0$:

Equação característica: $r^2 + 5r + 4 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow r = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4 \times 4}}{2}$$

$$\Leftrightarrow r = -4 \vee r = -1$$

A solução geral da EDO homogénea associada é

$$y_H = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-4t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

- Obter uma solução (y_p) da EDO completa pelo M.C.I.:

$e^{-t} = 1 \cdot e^{-t} \cdot 1$ ~~cos(0t)~~, logo é da forma

$P_m(t) \cdot e^{\alpha t} \cdot \cos(\beta t)$ com $m = 0$, $\alpha = -1$ e $\beta = 0$.

Por outro lado, $\alpha + i\beta = -1$ é raiz simples do polinómio característico. Assim, existe uma solução $y_p(t)$ da forma

$$y_p = t e^{-t} A, \quad \text{para certo } A \in \mathbb{R} \text{ (a determinar)}.$$

Então

$$y'_p = A(e^{-t} - t e^{-t}) = A e^{-t}(1-t)$$

$$y''_p = A(-e^{-t}(1-t) + e^{-t}(-1)) = A e^{-t}(t-2).$$

Substituindo na EDO dada,

(continua)

$$A \underbrace{e^{-t}(t-2)}_{y_p''} + 5\underbrace{A e^{-t}(1-t)}_{y_p'} + 4\underbrace{A e^{-t} t}_{y_p} = e^{-t}$$

$\Leftrightarrow A(t-2) + 5A(1-t) + 4At = 1$

$\Leftrightarrow 3A = 1 \Leftrightarrow A = \frac{1}{3}.$

Assim, $y_p(t) = \frac{1}{3} t e^{-t}.$

- Solução geral da EDO completa $(y = y_H + y_p)$:

$$y = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-4t} + \frac{1}{3} t e^{-t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

- Usar as condições iniciais $y(0)=0$ e $y'(0)=0$:

$y(0) = 0 \Leftrightarrow \boxed{c_1 + c_2 = 0}$

$y' = -c_1 e^{-t} - 4c_2 e^{-4t} + \frac{1}{3} e^{-t} - \frac{1}{3} t e^{-t}$

$y'(0) = 0 \Leftrightarrow \boxed{-c_1 - 4c_2 + \frac{1}{3} = 0}$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ -c_1 - 4c_2 + \frac{1}{3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} — \\ -3c_2 + \frac{1}{3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = -c_2 = -\frac{1}{9} \\ c_2 = \frac{1}{9} \end{cases}$$

A solução do PVI dado é

$$y(t) = -\frac{1}{9} e^{-t} + \frac{1}{9} e^{-4t} + \frac{1}{3} t e^{-t}$$
$$= \frac{1}{3} e^{-t}\left(t - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{9} e^{-4t}.$$

(b) Seja $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s)$, $s > s_y$

Usando a linearidade da Transformação de Laplace e fórmulas conhecidas (cf. formulário), obtemos

$$\mathcal{L}\{y'' + 5y' + 4y\}(s) = \mathcal{L}\{e^{-t}\}(s)$$

(continua)

$$\Leftrightarrow s^2 Y(s) - s\overset{=0}{y(0)} - \overset{=0}{y'(0)} + 5\left(sY(s) - \overset{\overset{0}{\parallel}}{y(0)}\right) + 4Y(s) = \frac{1}{s+1}, \ s>-1$$

$$\Leftrightarrow (s^2+5s+4)\,Y(s) = \frac{1}{s+1}, \quad s>-1$$

$$\Leftrightarrow (s+1)(s+4)\,Y(s) = \frac{1}{s+1}$$

$$\Leftrightarrow Y(s) = \frac{1}{(s+1)^2(s+4)}$$

$$\underset{(C.A.)}{\Leftrightarrow} Y(s) = -\frac{1}{9}\frac{1}{s+1} + \frac{1}{3}\frac{1}{(s+1)^2} + \frac{1}{9}\frac{1}{s+4}$$

$$\Leftrightarrow Y(s) = -\frac{1}{9}\mathcal{L}\{e^{-t}\}(s) + \frac{1}{3}\mathcal{L}\{t\}(s+1) + \frac{1}{9}\mathcal{L}\{e^{-4t}\}(s)$$

C.A.:

$$\frac{1}{(s+1)^2(s+4)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{(s+1)^2} + \frac{C}{s+4}$$

$$1 = A(s+1)(s+4) + B(s+4) + C(s+1)^2$$

$$1 = A(s^2+5s+4) + B(s+4) + C(s^2+2s+1)$$

$$\begin{cases} A+C=0 \\ 5A+B+2C=0 \\ 4A+4B+C=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-C \\ -3C+B=0 \\ -3C+4B=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - \\ B=3C \\ C=\frac{1}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-\frac{1}{9} \\ B=\frac{1}{3} \\ C=\frac{1}{9} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow Y(s) = -\frac{1}{9}\mathcal{L}\{e^{-t}\}(s) + \frac{1}{3}\mathcal{L}\{te^{-t}\}(s) + \frac{1}{9}\mathcal{L}\{e^{-4t}\}(s)$$

$$\Leftrightarrow Y(s) = \mathcal{L}\Big\{\underbrace{-\frac{1}{9}e^{-t} + \frac{1}{3}te^{-t} + \frac{1}{9}e^{-4t}}_{y(t)}\Big\}(s)$$

Portanto, a solução do P.V.I. é

$$y(t) = \frac{1}{3}e^{-t}\left(-\frac{1}{3}+t\right) + \frac{1}{9}e^{-4t}, \quad t\geq 0.$$

N.º: .... Nome: ....

N.º de folhas suplementares entregues na Questão 6: ....

Questão 6

6. [15] Considere uma equação diferencial da forma

$$y' = p(x) + q(x)y + r(x)y^2, \tag{1}$$

onde $p(x), q(x), r(x)$ são funções definidas num dado intervalo $I \subset \mathbb{R}$.
Seja $y_1(x)$ uma solução da equação (1) em I. Mostre que a mudança de variável

$$y = y_1 + \frac{1}{z} \quad (z \neq 0)$$

converte a equação dada numa equação diferencial linear (em x e z).

Se y_1 é solução da EDO (1) em I, então

$(*)$ $y_1'(x) = p(x) + q(x)\, y_1(x) + r(x)\, y_1(x)^2 \quad , \forall x \in I.$

$$y = y_1 + \frac{1}{z} \implies y' = y_1' + (z^{-1})' = y_1' - z^{-2} z'$$

Portanto, a EDO (1) converte-se na equação

$$y_1'(x) - \frac{z'}{z^2} = p(x) + q(x)\left(y_1(x) + \frac{1}{z}\right) + r(x)\left(y_1(x) + \frac{1}{z}\right)^2$$

por $(*)$

$$\Leftrightarrow y_1'(x) - \frac{z'}{z^2} = p(x) + q(x)\, y_1(x) + r(x)\, y_1(x)^2 + \frac{q(x)}{z} + \frac{2r(x)y_1(x)}{z} + r(x)\frac{1}{z^2}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{z'}{z^2} = \frac{q(x)}{z} + \frac{2r(x)\, y_1(x)}{z} + \frac{r(x)}{z^2}$$

$\times(-z)^2$

$$\Leftrightarrow z' = -q(x)\, z - 2r(x)\, y_1(x)\, z - r(x)$$

$$\Leftrightarrow z' + \left(q(x) + 2r(x)y_1(x)\right) z = -r(x).$$

(EDO linear em x e z).