Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

Matemática Discreta 2020/2021 - UC 47166 (1ºAno/2ºSem)

Teste T3 **Turma TP5/TP7 - Exemplo de Resolução** **24/06/2021**

Nome: **NMec:** **Curso:**

(5.0) 1. Resolva a seguinte relação de recorrência, justificando todos os passos:

$$a_n = a_{n-2} + n, \quad n \geq 2, \quad a_0 = 0, \; a_1 = 1.$$

Resolução: A equação de recorrência dada é linear não homogénea, com solução geral

$$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)},$$

onde $a_n^{(h)}$ corresponde à solução da parte homogénea, $a_n - a_{n-2} = 0$, e $a_n^{(p)}$ é a solução particular associada a

$$a_n - a_{n-2} = f(n), \quad \text{com} \quad f(n) = n\,. \tag{1}$$

Da parte homogénea resulta a equação característica:

$$x^2 - 1 = 0 \;\Leftrightarrow (x-1)(x+1) = 0,$$

pelo que, 1 é raiz característica de multiplicidade $m = 1$ e -1 é raiz característica de multiplicidade $m = 1$. Assim,

$$a_n^{(h)} = C_1 + C_2(-1)^n,$$

onde C_1 e C_2 são constantes a determinar.

Como $f(n) = n$ é um polinómio de grau $k = 1$ e 1 é uma raíz característica com multiplicidade $r = 1$ tem-se

$$a_n^{(p)} = A_0 n^r + A_1 n^{r+1} + \cdots + A_k n^{r+k} = A_0 n + A_1 n^2.$$

Substituindo $a_n^{(p)}$ em (1), determinam-se as constantes A_0 e A_1, vindo

$$A_0 n + A_1 n^2 - A_0(n-2) - A_1(n-2)^2 = n \Leftrightarrow A_0 n + A_1 n^2 - A_0(n-2) - A_1(n^2 - 4n + 4) = n$$

$$\Leftrightarrow 2A_0 + 4A_1 n - 4A_1 = n \Leftrightarrow 2(A_0 - 2A_1) + 4A_1 n = n \Leftrightarrow \begin{cases} A_0 = \frac{1}{2} \\ A_1 = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Assim,

$$a_n = C_1 + C_2(-1)^n + \frac{1}{2}n + \frac{1}{4}n^2,$$

e, atendendo às condições iniciais, $a_0 = 0$ e $a_1 = 1$, podem calcular-se as constantes C_1 e C_2:

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} C_2 = -C_1 \\ 2C_1 = \frac{1}{4} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} C_2 = -\frac{1}{8} \\ C_1 = \frac{1}{8}. \end{cases}$$

Logo,

$$a_n = \frac{1}{8} - \frac{1}{8}(-1)^n + \frac{1}{2}n + \frac{1}{4}n^2, \quad n \geq 0\,.$$

Formulário: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n x^n = \frac{1}{1-\alpha x}$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+m-1}{n} \alpha^n x^n = \frac{1}{(1-\alpha x)^m}$.

(2.5) 2. Determine a sucessão $(b_n)_{n\geq 0}$ associada à função geradora $\mathcal{B}(x) = 1 + \dfrac{x}{1-x^2}$.

Resolução: Temos que $\frac{x}{1-x^2} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x} \Leftrightarrow \frac{x}{1-x^2} = \frac{A+Ax+B-Bx}{1-x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ A-B=1 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = -\frac{1}{2} \end{cases}$.

Logo, $\displaystyle\mathcal{B}(x) = 1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{1-x} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+x} = 1 + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} x^n - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2}\big(1-(-1)^n\big)x^n.$

A sucessão associada a $\mathcal{B}(x)$ é

$$b_0 = 1 + \frac{1}{2}((-1)^0 - 1) = 1 \quad \text{e} \quad b_n = \frac{1}{2}\big(1-(-1)^n\big), \ \ n \geq 1.$$

(2.5) 3. Considere o problema de determinar o número de maneiras de distribuir n melões por 5 caixas, de modo que nenhuma das caixas fique vazia e numa dessas caixas se tenha um número de melões que seja múltiplo de 5, para $n \in \mathbb{N}$. Mostre que, a solução do problema pode ser obtida a partir da função geradora:

$$\mathcal{F}(x) = \frac{x^9}{(1-x)^4 \, (1-x^5)} \ .$$

Resolução: A solução do problema é dada pelo coeficiente de $x^i \ x^j \ x^k \ x^l \ x^m$, com $i = 5, 10, 15, \ldots$ (número de melões positivo e múltiplo de 5) $j, k, l, m = 1, 2, 3, \ldots$ (nenhuma caixa fica vazia), tal que, $i + j + k + l + m = n$, resultante do desenvolvimento da função geradora

$$\mathcal{F}(x) \ = \ \left(x^5 + x^{10} + x^{15} + \ldots\right)\left(x + x^2 + x^3 + \ldots\right)^4,$$

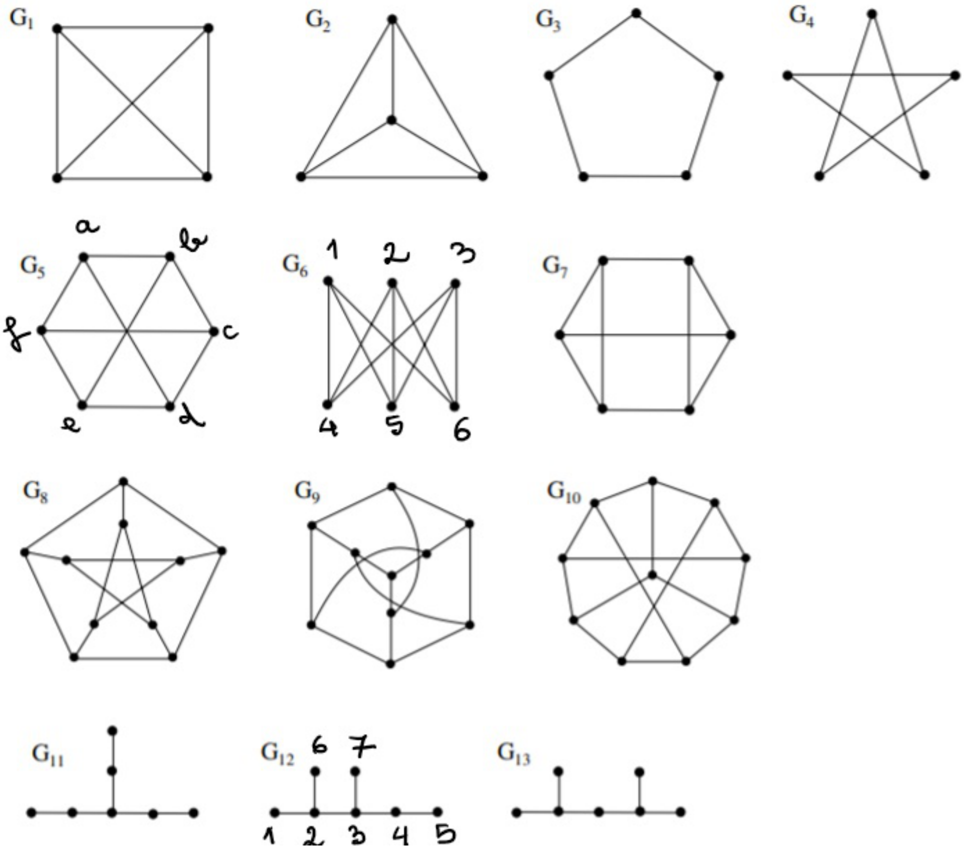
ou seja,
$\mathcal{F}(x) \ = \ x^5\left(1 + x^5 + x^{10} + \ldots\right) \ x^4 \ \left(1 + x + x^2 + \ldots\right)^4 \Leftrightarrow \mathcal{F}(x) \ = \ x^5\left(1 + (x^5)^1 + (x^5)^2 + \ldots\right) \ x^4 \ \dfrac{1}{(1-x)^4}$
$\Leftrightarrow \ \ \mathcal{F}(x) \ = \ x^9 \ \dfrac{1}{1-x^5} \ \dfrac{1}{(1-x)^4}.$

E, portanto,

$$\mathcal{F}(x) \ = \ \frac{x^9}{(1-x^5)(1-x)^4} \ ,$$

tal como se pretendia mostrar.

4. Considere os grafos $G_i = (V(G_i), E(G_i))$, para $i = 1, 2, \ldots, 13$, representados na figura seguinte:



(3.5) 4.(a) Indique dois grafos da mesma ordem que sejam bipartidos e isomorfos. Justifique devidamente.

Resolução: G_5 e G_6 são ambos grafos simples 3-regulares de ordem 6. G_5 e G_6 são bipartidos porque não têm ciclos de comprimento ímpar (apenas de comprimento 4 e 6). De acordo com a numeração dos vértices destes grafos (acima na figura) é possível obter as seguintes bipartições dos conjuntos dos seus vértices, de modo a que as arestas unem apenas vértices de subconjuntos distintos:

$$G_5 = (X, Y, E(G_5)), \quad X = \{a, c, e\},\ Y = \{b, d, f\}, \quad \text{com} \quad V(G_5) = X \cup Y,$$

$$G_6 = (W, Z, E(G_6)), \quad W = \{1, 2, 3\},\ Z = \{4, 5, 6\}, \quad \text{com} \quad V(G_6) = W \cup Z.$$

Existe uma bijeção $\phi : V(G_5) \mapsto V(G_6)$, com $\phi(a) = 1$, $\phi(b) = 4$, $\phi(c) = 2$, $\phi(d) = 5$, $\phi(e) = 3$ e $\phi(f) = 6$, tal que, para $x, y \in V(G_5)$, xy é uma aresta de G_5 se e só se $\phi(x)\phi(y)$ é uma aresta de G_6. Logo ϕ é um isomorfismo dos grafos G_5 e G_6 e estes grafos são isomorfos, isto é, $G_5 \cong G_6$.

(1.5) 4.(b) Numere os vértices do grafo representado por G_{12} e escreva a matriz de adjacência desse grafo.

Resolução:

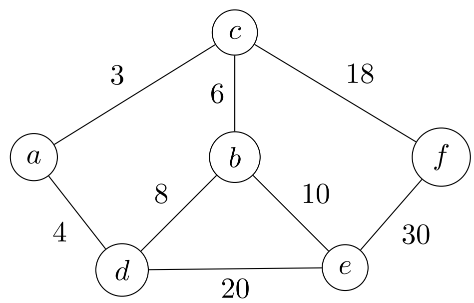
$$A_{G_{12}} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

5. Considere o grafo $H = (V(H), E(H))$, com $V(H) = \{a, b, c, d, e, f\}$, definido pela matriz de custos:

$$W = \begin{pmatrix} 0 & \infty & 3 & 4 & \infty & \infty \\ \infty & 0 & 6 & 8 & 10 & \infty \\ 3 & 6 & 0 & \infty & \infty & 18 \\ 4 & 8 & \infty & 0 & 20 & \infty \\ \infty & 10 & \infty & 20 & 0 & 30 \\ \infty & \infty & 18 & \infty & 30 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1.5) 5.(a) Represente o grafo H com indicação do custo associado em cada uma das arestas.

Resolução: O grafo H com os custos nas arestas é



(3.5) 5.(b) Aplicando o algoritmo de Dijkstra, determine o caminho de custo mínimo entre os vértices a e f do grafo H representado na alínea anterior, indicando também qual é esse custo.

Resolução: Aplicamos o algoritmo de Dijkstra, começando pelo vértice $z = a$ e parando quando o vértice $z = f$ se torna definitivo:

Iteração	a	b	c	d	e	f	z
0	$(0, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	a
1	$\times$	$(\infty, -)$	$(\mathbf{3}, \mathbf{a})$	$(\mathbf{4}, \mathbf{a})$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	c
2	$\times$	$(\mathbf{9}, \mathbf{c})$	$\times$	$(\mathbf{4}, \mathbf{a})$	$(\infty, -)$	$(\mathbf{21}, \mathbf{c})$	d
3	$\times$	$(\mathbf{9}, \mathbf{c})$	$\times$	$\times$	$(\mathbf{24}, \mathbf{d})$	$(\mathbf{21}, \mathbf{c})$	b
4	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$(\mathbf{19}, \mathbf{b})$	$(\mathbf{21}, \mathbf{c})$	e
5	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$(\mathbf{21}, \mathbf{c})$	f

Concluímos que o caminho de custo mínimo entre os vértices a e f é $P = a, c, f$, com custo 21.