5. Séries Numéricas

Cálculo I – agrupamento 4 19/20

baseado no texto de Virgínia Santos, Cálculo II — Cálculo com funções de uma variável, 2009/10, pp. 103 — 157 e no texto de Alexandre Almeida, Cálculo II — Texto de apoio às aulas, 2012

Isabel Brás

UA

4/2/2020

Conteúdos

Série numérica — definição

$\downarrow$

traduz uma soma infinita de números reais, formalizando...

Definição:

Seja $(\mathbf{a_n})$ uma sucessão de números reais e considere-se a sucessão (S_n) definida por

$$\begin{array}{rcl} S_1 & = & \mathbf{a_1} \\ S_2 & = & \mathbf{a_1} + \mathbf{a_2} = S_1 + \mathbf{a_2} \\ \vdots & & \vdots \qquad\qquad \vdots \\ S_n & = & \mathbf{a_1} + \mathbf{a_2} + \cdots + \mathbf{a_n} = S_{n-1} + \mathbf{a_n}, \qquad n \in \mathbb{N}. \end{array}$$

Ao par $((\mathbf{a_n}), (S_n))$ chamamos série numérica de **termo geral $\mathbf{a_n}$**.
A sucessão (S_n) é designada por sucessão das somas parciais da série.

Notação e Nomenclatura

A série de termo geral a_n representa-se usualmente por

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \quad \text{ou} \quad \sum_{n\geq 1} a_n$$

ou ainda, por

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

Nomenclatura:

$$\begin{array}{rcl} a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots & \longrightarrow & \text{termos da série} \\ (a_n) & \longrightarrow & \text{sucessão dos termos da série} \\ S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots & \longrightarrow & \text{somas parciais da série} \\ (S_n) & \longrightarrow & \text{sucessão das somas parciais da série} \end{array}$$

Exemplo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$$

termo geral da série: $a_n = \frac{1}{2^n}$

termos da série: termos da sucessão (a_n), *i.e.*, $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$

sucessão das somas parciais da série: (S_n) tal que

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{aligned}$$

somas parciais da série: termos da sucessão (S_n), *i.e.*, $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \ldots$

Natureza de uma série

Definição (convergência):

Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ uma série numérica cuja sucessão de somas parciais é (S_n).

Se $\lim_{n\to+\infty} S_n = s$, onde $s \in \mathbb{R}$, então dizemos que $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é convergente e que a sua soma é s. Neste caso escrevemos

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = s\,.$$

Em caso contrário, *i.e.*, se $\lim_{n\to+\infty} S_n$ não existe ou é infinito, então dizemos que a série é divergente.

Exemplos

- A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$ é convergente e tem soma igual a 1. Logo,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 1\,.$$

Ver slide 5

- A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n$ é divergente, pois a sua sucessão das somas parciais não tem limite.
- A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ é convergente e tem soma igual a 1. Assim,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1\,.$$

Séries Geométricas

Definição:

Chama-se **série geométrica** a toda a série cujo termo geral é uma progressão geométrica. Isto é, uma série geométrica de primeiro termo $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ e razão $r \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ é da forma

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$$

A série geométrica de primeiro termo a e razão r pode representar-se numa das formas

$$\sum_{n=1}^{+\infty} ar^{n-1} \quad \text{ou} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} ar^n.$$

Exemplos:

$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} 2^{n-1}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^n$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{4^{n-1}}$ são séries geométricas.

Convergência das séries geométricas

$$\sum_{n=1}^{+\infty} ar^{n-1} \text{ é } \begin{cases} \nearrow \text{ convergente se } |r| < 1, \text{ e a sua soma é } \dfrac{a}{1-r} \\[2em] \searrow \text{ divergente se } |r| \geq 1 \end{cases}$$

Exemplo:

A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n-1}}{5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5}\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$ é uma série geométrica de razão $\frac{2}{5}$.

Como $-1 < \frac{2}{5} < 1$ a série é convergente e tem soma $\displaystyle\frac{1}{5} \times \frac{1}{1-\frac{2}{5}} = \frac{1}{3}$.

Séries de Mengoli (ou redutíveis, ou telescópicas)

Definição:

Uma série diz-se de Mengoli se o seu termo geral se pode escrever como diferença de dois termos de uma mesma sucessão, i.e.,

a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é uma série de Mengoli se existir uma sucessão (u_n) e um $p \in \mathbb{N}$ tais que

$$a_n = u_{n+p} - u_n, \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

ou

$$a_n = u_n - u_{n+p}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Exemplo:

$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \right)$ é uma série de Mengoli. [Estude a sua natureza.]

Convergência das séries de Mengoli

No caso (o outro caso tem tratamento análogo)

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(u_n - u_{n+p})$$

a série é convergente se e só se a sucessão de termo geral $u_{n+1} + \cdots + u_{n+p}$ é convergente. Nesse caso,

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(u_n - u_{n+p}) = u_1 + \cdots + u_p - \lim_{n\to+\infty}\left(u_{n+1} + \cdots + u_{n+p}\right).$$

Observação:

Se (u_n) for convergente, então

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(u_n - u_{n+p}) = u_1 + \cdots + u_p - p \cdot \lim_{n\to+\infty} u_n$$

Exemplos

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{n(n+4)}$ é uma série telescópica convergente. [Porquê?]

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \ln \frac{n}{n+1}$ é uma série telescópica divergente. [Porquê?]

Propriedades das séries

- Condição necessária de convergência.

Proposição:

Se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é convergente então $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Observações:

- A afirmação recíproca não é verdadeira, i.e., existem séries divergentes cujo termo geral é um infinitésimo. Por exemplo, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln \frac{n}{n+1}$ é divergente (ver slide 12), mas $\lim_{n\to+\infty} \ln \frac{n}{n+1} = 0$.
- A proposição pode ser enunciada da seguinte forma equivalente:

  Se $\lim_{n\to+\infty} a_n$ não existir ou for diferente de zero, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é divergente.

Propriedades das séries (cont.)

- A natureza de uma série não depende dos seus primeiros termos.

Proposição:

Para qualquer $p \in \mathbb{N}$, as séries

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \quad \text{e} \quad \sum_{n=p+1}^{+\infty} a_n \text{ têm a mesma natureza.}$$

Exemplo de aplicação: A série $\displaystyle\sum_{n=9}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$ é convergente, pois é convergente a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$ (ver slide 7).

- Propriedades Operatórias.

Proposição:

(i) Se $\lambda \in \mathbb{R}$ e a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é convergente, então $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda a_n$ converge e

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n = \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} a_n.$$

(ii) Se $\lambda \neq 0$ e a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é divergente, então $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda a_n$ diverge.

(iii) Se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ são convergentes, então $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n)$ converge e

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n.$$

(iv) Se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é convergente e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ é divergente, então $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n)$ diverge.

Propriedades operatórias — Observação

Se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ são ambas divergentes, então nada se pode concluir, a partir daí, quanto à natureza de $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n + b_n)$.

Exemplo a propósito:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n \quad , \quad \sum_{n=1}^{+\infty} 2n \quad , \quad \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \quad , \quad \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}$$

são todas séries divergentes, mas

$\sum_{n=1}^{+\infty}(n+2n)$ diverge e $\sum_{n=1}^{+\infty}[(-1)^n+(-1)^{n+1}]$ converge. [Porquê?]

Propriedades operatórias—Exemplos

1. Uma vez que as séries $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ são convergentes, então a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{n(n+1)}\right)$ é também convergente e

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{n(n+1)}\right) = 1 - 1 = 0.$$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$ é divergente, pois $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} 1$ diverge e $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$ converge.

Séries de termos não negativos

Definição:

$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diz-se uma série de termos não negativos se $a_n \geq 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Teorema (Condição necessária e suficiente de convergência):

Uma série de termos não negativos converge se, e só se, a sua sucessão das somas parciais é limitada superiormente.

Exemplo:

A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}$ é convergente, visto que $\frac{1}{n!} \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e a sucessão (S_n) é limitada superiormente:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \leq 2, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Critério do Integral

Teorema (Critério do Integral):

Sejam $a_n \geq 0$ e $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ uma função decrescente tal que $f(n) = a_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Então a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e o integral $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\, dx$ têm a mesma natureza.

Exercício:

Usando o Critério do Integral, estude a natureza da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5}{2n+3}$.

Séries de Dirichlet

Seja $\alpha \in \mathbb{R}$. À série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

chamamos série de Dirichlet de ordem α ou série harmónica de ordem α.

Por aplicação do critério do integral pode concluir-se que:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \text{ é } \begin{cases} \nearrow \text{ convergente, se } \alpha > 1 \\ \searrow \text{ divergente, se } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Critério de Comparação

Teorema (Critério de Comparação):

Suponha-se que existe $p \in \mathbb{N}$ tal que

$$0 \leq a_n \leq b_n, \qquad \text{para todo } \; n \geq p.$$

Então:

(i) Se $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ é convergente, então $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é convergente.

(ii) Se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é divergente, então $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ é divergente.

Exemplos

- Qual é a natureza da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$?

  Uma vez que

  $$0 < \frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}} < \frac{1}{\sqrt{n^3}}\ , \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

  e que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ é série de Dirichlet convergente, pelo critério de comparação a série é convergente.

- A série

  $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n-1}$$

  é divergente. [Tire essa conclusão usando o critério de comparação.]

Critério de comparação por passagem ao limite

Corolário do Critério de Comparação:

Sejam $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ tais que $a_n \geq 0$ e $b_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
Suponha-se que existe o limite

$$L := \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n}.$$

Então:

(i) Se $L \in \mathbb{R}^+$, as séries $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ são da mesma natureza.

(ii) Se $L = 0$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ é convergente, então $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é convergente.

(iii) Se $L = +\infty$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ é divergente, então $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é divergente.

Exemplo:

A natureza da série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+5}{1+n^4}$ pode obter-se da comparação por passagem ao limite com a série de Dirichlet $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$, que é convergente.

De facto, ambas as séries são de termos positivos e

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{2n+5}{1+n^4}}{\frac{1}{n^3}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n^4+5n^3}{1+n^4} = 2 \in \mathbb{R}^+,$$

logo, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+5}{1+n^4}$ é convergente.

Exercícios:

Usando o critério de comparação por passagem ao limite estude a natureza das seguintes séries: (a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n+3^n}$ (b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{sen}(1/n)$

Série dos Módulos

Definição:

Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ uma série numérica. À série $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ chamamos série dos módulos associada à série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Proposição:

Se a série dos módulos $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ é convergente, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é convergente.

Observação:

Existem séries convergentes cuja série dos módulos é divergente, Ver slide 32.

Convergência Simples e Convergência Absoluta

Definição:

Uma série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diz-se absolutamente convergente quando a série dos módulos $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ for convergente.

Uma série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diz-se simplesmente convergente quando é convergente mas, a série dos módulos $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ é divergente.

Observação:

Toda a série absolutamente convergente é convergente.

Critério de D'Alembert (ou Critério da Razão)

Teorema:

Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ uma série de termos <u>não nulos</u>. Suponhamos que existe o limite

$$L := \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.$$

Então:

(i) Se $L < 1$, a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente.

(ii) Se $L > 1$, a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente.

Exemplo de Aplicação do Critério de D'Alembert:

A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}$ é (absolutamente) convergente, pois

$$
\begin{aligned}
L &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}}}{\frac{n!}{n^n}} \\
&= \cdots \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} = \frac{1}{e} < 1.
\end{aligned}
$$

Exercício:

Usando o Critério da Razão estude a natureza das séries da seguinte forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{\beta^n}, \quad \beta \neq 0$$

Critério de Cauchy (ou Critério de Raiz)

Teorema:

Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ uma série de números reais. Suponhamos que existe o limite

$$L := \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Então:

(i) Se $L < 1$, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é absolutamente convergente.

(ii) Se $L > 1$, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é divergente.

Exemplo de aplicação do Critério da Raiz:

A série
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n^2+1}{2n^2+3}\right)^{2n}$$
é (absolutamente) convergente, pois
$$L=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n^2+1}{2n^2+3}\right)^{2n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{2n^2+3}\right)^2=\frac{1}{4}<1.$$

Exercício:

Usando o critério da raiz estude a natureza da série:
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}$$

Séries Alternadas

Definição:

Uma **série alternada** é uma série da forma

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n v_n \quad \text{ou} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} v_n$$

em que $v_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Teorema (Critério de Leibniz):

Suponhamos que (v_n) é uma sucessão de termos positivos, monótona decrescente e $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$. Então a série alternada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n v_n$ é convergente.

Exemplo de aplicação do Critério de Leibniz:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

Como a sucessão $\left(\frac{1}{n}\right)$ é de termos positivos, monótona decrescente e $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, então, pelo Critério de Leibniz, a série é convergente.

Observação:

Note que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge simplesmente, uma vez que é convergente mas a sua série dos módulos é divergente.

Algumas propriedades sobre limites de sucessões numéricas (úteis no estudo das séries)

1. Uma sucessão é convergente para a se e só se toda a sua subsucessão é convergente para a. $(a \in \mathbb{R})$
2. Toda a sucessão monótona e limitada é convergente.
3. Se $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$, então $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell$.
4. Para $x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n = e^x$.
5. Para $a > 1$ e $k \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a^n}{n^k} = +\infty$.
6. Para $a \in \mathbb{R}^+$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.
7. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.
8. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$.