

Álgebra Linear e Geometria Analítica

Agrupamento IV: Mestrado Integrado em Eng.^a Eletrónica e Telecomunicações | Mestrado Integrado em Eng.^a de Computadores e Telemática | Licenciatura em Eng.^a Informática

15 de Janeiro de 2020

3^a prova de avaliação

Duração: 1h15

Justifique devidamente todas as suas respostas.

1. Considere a matriz $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ e a transformação linear $\phi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\phi(X) = CX$ para todo o $X \in \mathbb{R}^4$.
- Determine a imagem de ϕ , $\text{im}(\phi)$, e uma sua base.
 - ϕ é sobrejetiva? Justifique.
 - ϕ é injetiva? Justifique.
 - Encontre a matriz G representativa da transformação ϕ relativamente às bases $\mathcal{S} = (X_1, X_2, X_3, X_4)$ de \mathbb{R}^4 com $X_1 = (1, 1, 1, 1)$, $X_2 = (0, 1, 1, 1)$, $X_3 = (0, 0, 1, 1)$, $X_4 = (0, 0, 0, 1)$ e $\mathcal{T} = ((1, 1), (0, 1))$ de \mathbb{R}^2 .
 - Considere o vetor $X = 2X_1 - X_2 + X_3 - 2X_4$. Usando a matriz G obtida na alínea anterior, determine $\phi(X)$.

Caso não tenha resolvido a alínea anterior, use a matriz C .

2. Considere a cónica de equação $-2x^2 + 4xy - 2y^2 + x + y + 1 = 0$. Determine uma sua equação reduzida e classifique-a.
3. Classifique as quádricas definidas pelas seguintes equações:
- $x^2 + 2x = 2y^2 + 4y + z^2$;
 - $x^2 - 6x = -y^2 - z^2$;
4. Considere a base $\mathcal{B} = ((1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1))$ de \mathbb{R}^3 e o **isomorfismo** $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definido por $f(1, 1, 1) = (0, 1, 1)$, $f(0, 1, 1) = (0, 0, 1)$ e $f(0, 0, 1) = (1, 1, 1)$.
Seja $f \circ f$ a função composta $f \circ f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $(f \circ f)(x, y, z) = f(f(x, y, z))$. A função composta $f \circ f$ é uma transformação linear.
Determine o núcleo de $f \circ f$.

Questão	1	2	3	4
Cotação	9	6	3	2