Cálculo II - Agrup. 4, 2020/21

Alexandre Almeida
(DMat - UA)

abril 2021

CAPÍTULO 3

Extremos de funções reais de várias variáveis reais
(parte 1)

– material de apoio –

Conteúdos

3.1 Algumas noções topológicas em $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$
Espaço euclidiano

$\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, \ldots, n\} \qquad (n \in \mathbb{N})$

$\mapsto$ espaço vetorial real de dimensão n munido com produto interno:

- Operações definidas por
$$x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \quad \text{e} \quad \lambda x = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n),$$
para $x = (x_1, \ldots, x_n),\ y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Base canónica constituída pelos vetores $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_n}$, onde
$$\mathbf{e_i} = (0, \ldots, 0, \underset{\text{pos. i}}{1}, 0, \ldots, 0), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

- **Produto interno** definido por
$$x \cdot y = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$
para $x = (x_1, \ldots, x_n),\ y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

Norma e distância euclidianas

A norma euclidiana é dada por

$$\|x\| := \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}, \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Notar que

$$\|x\| \geq 0 \quad \text{e} \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

São ainda válidas as desigualdades (para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^n$):

- desigualdade triangular:

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

-

$$\|x - y\| \geq \big| \|x\| - \|y\| \big|$$

- desigualdade de Cauchy-Schwarz:

$$|x \cdot y| \leq \|x\| \|y\|.$$

A distância euclidiana entre $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (x_1, \ldots, x_n)$ é dada por

$$\|x - y\| := \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

Definição (bola)

Chama-se **bola** (aberta) de centro $a \in \mathbb{R}^n$ e raio $r > 0$ ao conjunto

$$B_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| < r\}.$$

- $n = 1$: $B_r(a) =]a - r, a + r[$ (notar que $\|x - y\| = |x - y|$ em $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$).
- $n = 2$: $B_r(a)$ corresponde ao interior do círculo centrado em a e raio r.
- $n = 3$: $B_r(a)$ corresponde ao interior da esfera centrada em a e raio r.

Definição (conjunto limitado)

Um conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$ diz-se **limitado** se existir alguma bola que o contenha.

Noções topológicas em $\mathbb{R}^n$ (cont.)

Sejam $D \subseteq \mathbb{R}^n$ e $a \in \mathbb{R}^n$.

Definição (ponto interior)

Diz-se que a é um **ponto interior** de D se existir alguma bola de centro a contida em D. A totalidade dos pontos interiores de D constitui um novo conjunto designado por **interior** de D e denota-se por $int(D)$:

$$a \in int(D) \Leftrightarrow \exists r > 0 : B_r(a) \subseteq D.$$

Definição (ponto exterior)

Diz-se que a é um **ponto exterior** a D se for ponto interior do complementar de D. O conjunto de tais pontos designa-se por **exterior** de D, $ext(D)$:

$$a \in ext(D) \Leftrightarrow \exists r > 0 : B_r(a) \subseteq D^c = \mathbb{R}^n \setminus D.$$

Definição (ponto fronteiro)

Diz-se que a é um **ponto fronteiro** de D se não for interior nem exterior. A totalidade dos pontos fronteiros, $fr(D)$, constitui a **fronteira** de D:

$$a \in fr(D) \Leftrightarrow \forall r > 0,\ B_r(a) \cap D \neq \emptyset \quad \text{e} \quad B_r(a) \cap D^c \neq \emptyset.$$

Noções topológicas em $\mathbb{R}^n$ (cont.)

Definição (fecho ou aderência)

Chama-se **fecho ou aderência** de $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ao conjunto $\overline{D} = D \cup fr(D)$.

Definição (conjunto aberto / conjunto fechado)

$D \subseteq \mathbb{R}^n$ diz-se um **conjunto aberto** se $int(D) = D$.
$D \subseteq \mathbb{R}^n$ diz-se um **conjunto fechado** se $\overline{D} = D \Leftrightarrow fr(D) \subseteq D$.

Definição (ponto isolado / ponto de acumulação)

Um ponto $a \in \mathbb{R}^n$ diz-se um **ponto de acumulação** de D se toda a bola centrada em a contém pontos de D distintos de a. O conjunto de todos os pontos de acumulação de D designa-se por **conjunto derivado** de D e denota-se por D':

$$a \in D' \Leftrightarrow \forall r > 0,\ B_r(a) \cap (D \setminus \{a\}) \neq \emptyset.$$

Um ponto $a \in D$ diz-se um **ponto isolado** de D se $a \in D$ e $a \notin D'$, ou seja,

$$\exists r > 0 :\ B_r(a) \cap D = \{a\}.$$

Exemplo

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 4\right\} \cup \{(3, 0)\}$$

- $int(D) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 4\right\}$;
- $ext(D) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 4\right\} \setminus \{(3, 0)\}$;
- $fr(D) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4\right\} \cup \{(3, 0)\}$;
- $\overline{D} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\right\} \cup \{(3, 0)\}$;
- $D' = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\right\}$;
- Pontos isolados de D: $\{(3, 0)\}$;
- D não é aberto nem é fechado;
- D é um conjunto limitado.

1. Estudar os seguintes conjuntos do ponto de vista topológico:

   (a) $\mathbb{Q}$ (conjunto dos números racionais);

   (b) $D = \left\{ \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k} \right) : k \in \mathbb{N} \right\}$;

   (c) $D = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1 \right\}$.

2. Mostre que:
   1. $\mathbb{R}^n$ é simultaneamente aberto e fechado.
   2. Toda a bola (aberta) $B_r(a)$ é um conjunto aberto em $\mathbb{R}^n$.

Nota: É possível provar que, para qualquer $D \subseteq \mathbb{R}^n$, D é fechado se e só se $\mathbb{R}^n \setminus D$ é aberto.

3.2 Conceitos básicos sobre funções reais de várias variáveis reais (f.r.v.v.r.)

Definição

Uma **função real de n variáveis reais** $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma correspondência que a cada elemento $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de D associa um único número real $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. O conjunto D é o **domínio** de f. O **contradomínio** de f é o conjunto dos valores que f toma em $\mathbb{R}$:

$$CD_f = \{z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) : (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D\}.$$

O **gráfico** de f é o subconjunto de $\mathbb{R}^{n+1}$

$$\mathcal{G}_f = \left\{(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) \in \mathbb{R}^{n+1} : z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \ \text{com} \ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D\right\}.$$

Nota: Apesar da definição anterior contemplar um qualquer número n de variáveis, usualmente iremos lidar com os casos $n = 2$ ou $n = 3$.

Algumas funções (de domínio $\mathbb{R}^2$, exceto a última)

1. $f(x, y) = 2x - y$; $\quad CD_f = \mathbb{R}$.

   $$\mathcal{G}_f = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 2x - y\right\}$$ ▸ Esboço gráfico (plano)

2. $f(x, y) = x^2 + y^2$; $\quad CD_f = \mathbb{R}_0^+$.

   $$\mathcal{G}_f = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2\right\}$$ ▸ Esboço gráfico (parabolóide circular)

3. $g(x, y) = 4 - y^2$; $\quad CD_g =]-\infty, 4]$. ▸ esboço gráfico (cilindro parabólico)

4. $h(x, y) = x^2 - y^2$; $\quad CD_h = \mathbb{R}$. ▸ esboço gráfico (parabolóide hiperbólico)

5. $s(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$; $\quad CD_s = [-1, 1]$. ▸ esboço gráfico

6. $u(x, y) = \sin(x)$; $\quad CD_u = [-1, 1]$.

7. $v(x, y) = \ln(1 + x^2 + y^2)$; $\quad CD_v = \mathbb{R}_0^+$.

8. $w(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$; $\quad D_w = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \quad CD_w = \mathbb{R}$.

Uma sugestão e um exercício...

Sugestão: Use o GeoGebra para esboçar e comparar cada um dos gráficos anteriores, incluindo os das funções $u(x, y)$, $v(x, y)$ e $w(x, y)$ (e outros que queira ”inventar”).

Exercício

Determine o domínio e o contradomínio da função dada por

$$f(x, y, z) = 2 + \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}.$$

Conjuntos de nível

Definição (conjunto de nível)

Seja $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Chama-se **conjunto de nível** $k \in \mathbb{R}$ da função f ao conjunto

$$\mathcal{N}_k = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D : \ f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = k\}\,.$$

Nota: Importa considerar apenas valores $k \in CD_f$.

Casos particulares: **curvas de nível** ($n = 2$) e **superfícies de nível** ($n = 3$).

Exemplo

- As curvas de nível $k \in]-\infty, 4]$ de $g(x, y) = 4 - y^2$ são as retas

$$\mathcal{C}_k = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ y = \pm\sqrt{4 - k}\right\}.$$

esboço;

- Relativamente à função $h(x, y) = x^2 - y^2$, as suas curvas de nível $k = 0$ são as retas $y = \pm x$, enquanto que as curvas de nível $k \neq 0$ são hipérboles de equação $x^2 - y^2 = k$. esboço

3.3 Limites e continuidade (breve referência)

Notas prévias:

- Não se pretende aqui fazer um estudo aprofundado de limites e continuidade de funções reais de várias variáveis reais (f.r.v.v.r.). Este assunto será revisitado em Cálculo III (para os cursos com esta UC no seu plano curricular).
- Por razões de simplificação, os resultados serão apresentados para funções de 2 variáveis apenas (embora continuem válidos para um qualquer número de variáveis, com as devidas adaptações).

Limites de sucessões

Definição (limite de uma sucessão)

Diz-se que uma sucessão $\big((x_k, y_k)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{R}^2$ converge para $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ se para cada $r > 0$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $(x_k, y_k) \in B_r((a, b))$ para todo o $k > k_0$. Escrevemos $\lim\limits_{k\to\infty} (x_k, y_k) = (a, b) \quad \big(\text{ou} \quad (x_k, y_k) \to (a, b)$ quando $k \to \infty\big)$.

- Mostra-se sem grande dificuldade que

$$(x_k, y_k) \to (a, b) \quad (\text{em } \mathbb{R}^2) \quad \Leftrightarrow \quad x_k \to a \quad \text{e} \quad y_k \to b \quad (\text{em } \mathbb{R}).$$

  (redução ao estudo das sucessões coordenadas).

- O limite (quando existe) é único.

Exemplo

A sucessão $\left(\left(\frac{k}{k+1}, \frac{1}{k}\right)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge (em $\mathbb{R}^2$) para o ponto $(1, 0)$, pois $\lim_{k\to\infty} \frac{k}{k+1} = 1$ e $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$.

Limites de funções

Definição (limite de uma f.r.v.v.r.)

Sejam $\ell \in \mathbb{R}$, $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e (a, b) um ponto de acumulação de D. Diz-se que ℓ é **limite** de $f(x, y)$ quando (x, y) tende para (a, b), e escreve-se $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = \ell$, se para qualquer sucessão de pontos $\big(x_k, y_k\big)_{k\in\mathbb{N}}$ de $D \setminus \{(a, b)\}$ convergente para (a, b), a correspondente sucessão das imagens $\big(f(x_k, y_k)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ convergir para ℓ (em $\mathbb{R}$).

Prova-se facilmente (tente fazê-lo !) que

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} c = c, \qquad \lim_{(x,y)\to(a,b)} x = a, \qquad \lim_{(x,y)\to(a,b)} y = b \qquad (c \in \mathbb{R}).$$

Muitas das propriedades dos limites conhecidas para funções de uma variável continuam válidas para f.r.v.v.r. (e.g., a unicidade e as propriedades algébricas). Mas nem tudo é semelhante, como iremos ver mais adiante.

Limites de funções

Exemplo

Mostremos que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} = 0.$

Seja (x_k, y_k) uma sucessão arbitrária de pontos de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ convergente para $(0,0)$. Designando a função em causa por f, temos

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k, y_k) = \lim_{k\to\infty} \overbrace{x_k}^{\text{infinitésimo}} \underbrace{\frac{y_k^2}{x_k^2+y_k^2}}_{\in[0,1]} = 0.$$

É sabido que para funções reais de uma única variável a existência de limite num ponto equivale à existência e coincidência de ambos os limites laterais nesse ponto. Ora, para f.r.v.v.r. o estudo de "limites direcionais" (i.e., limites segundo semi-retas com origem no ponto) não é suficiente para se garantir a existência de limite.

Limites segundo subconjuntos do domínio

Definição

Sejam $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $S \subset D$ e (a, b) um ponto de acumulação de S. Diz-se que o limite de $f(x, y)$ quando (x, y) tende para (a, b) restrito a S é ℓ se $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f_{|S}(x, y) = \ell$. Também se escreve

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(a,b)\\(x,y)\in S}} f(x, y) \quad \text{ou} \quad \lim_{\substack{(x,y)\to(a,b)\\S}} f(x, y)$$

para denotar o limite da restrição de f ao conjunto S.

Exemplo

Seja f a função $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$, com domínio $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Para

$$S = \{(0, y) : y \neq 0\} \quad \text{e} \quad R = \{(x, x) : x \neq 0\},$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in S}} f(x, y) = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y^2} = 0; \qquad \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in R}} f(x, y) = \frac{x^2}{x^2 + x^2} = \frac{1}{2}.$$

(Não) existência de limite

Proposição

Sejam $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $S \subset D$ e (a,b) um ponto de acumulação de S. Se existir o limite $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$, então também existe $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(a,b)\\ S}} f(x,y)$ e é igual.

Observação: Basta que existam dois limites restritos diferentes (ou que um não exista) para que não exista o limite “global”.

Aplicação: Com base na observação e slide anteriores, o que podemos concluir sobre a existência de limite da função $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ na origem?

Os chamados **limites direcionais** são um caso especial de limites restritos, nos quais se considera a restrição da função a semirretas S com origem no ponto (a,b) (de acumulação do domínio D). Correspondem, portanto, a calcular-se $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(a,b)\\ S\cap D}} f(x,y)$. É possível mostrar que o limite direcional de f no ponto (a,b) segundo um vetor $v=(v_1,v_2)$ (não nulo) é dado por

$$\lim_{\substack{t\to 0^+\\ (a,b)+t(v_1,v_2)\in D}} f((a,b)+t(v_1,v_2)) \quad \text{(depende da direção e sentido de } v\text{)}.$$

Exemplo: limites direcionais

Nota: É comum fazer-se a referência a limites laterais num ponto como sendo limites restritos às retas que passam nesse ponto (dependendo, nesse caso, apenas da direção do vetor diretor da reta).

Ainda que uma função possua todos os limites direcionais iguais num dado ponto, tal não é suficiente para garantir que o limite global nesse ponto existe!

Exemplo

Seja $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^6+2y^3}$. Temos $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0}} f(x,y) = 0$ e $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} f(x,y) = 0$.

Mas f não tem limite no ponto $(0,0)$ pois $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x^2}} f(x,y) = \frac{1}{3}$ $(\neq 0)$.

Existência de limite

Pela afirmativa, registamos apenas dois resultados que são úteis em algumas situações (para se concluir a existência de limite).

Proposição (produto de infinitésimo por função limitada)

Sejam $f, g : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *e* (a, b) *um ponto de acumulação de* D*. Se* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = 0$ *e* g *é limitada em* $D \cap B_r((a, b))$*, para algum* $r > 0$*, então*

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y)\, g(x, y) = 0.$$

Exemplo

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 + x^2 y}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x + y) \frac{x^2}{x^2 + y^2} = 0 \qquad \text{(porquê ?)}$$

Existência de limite (cont.)

Proposição (mudança de variável)

Considere-se a composição $f(x,y) = g(h(x,y))$ *com domínio* D *e seja* (a,b) *um ponto de acumulação de* D. *Suponha-se que* $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} h(x,y) = c$ *e* $\lim\limits_{u\to c} g(u) = \ell$. *Se* g *é contínua*[(*)] *em* c *(ou* g *não está definida em* c*), então*

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \ell.$$

(*) **cf. slide seguinte**. Todos estes resultados podem ser reescritos para funções com um qualquer número de variáveis, com as devidas alterações.

Exemplo (mudança de variável para uma função a 3 variáveis)

Calcular $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2+z^2)}{x^2+y^2+z^2}$:

Considere-se $u = h(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ e $g(u) = \frac{\operatorname{sen} u}{u}$. Temos $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} h(x,y,z) = 0$ e $\lim\limits_{u\to 0} g(u) = 1$. Então

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2+z^2)}{x^2+y^2+z^2} = \lim_{u\to 0} \frac{\operatorname{sen} u}{u} = 1.$$

Continuidade

Tal como no caso dos limites, apresentamos a definição para o caso de funções a duas variáveis apenas. A extensão ao caso geral é imediata.

Definição (função contínua (a 2 variáveis))

Uma função $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diz-se **contínua** num ponto de acumulação $(a, b) \in D$ se

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = f(a, b).$$

f é contínua num subconjunto $S \subseteq D$ se é contínua em todos os pontos de S.

Nota: Assume-se que f é contínua nos pontos isolados do seu domínio.

Exemplo

A função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

é contínua no ponto $(0, 0)$. Porquê ?

Continuidade (algumas propriedades)

A continuidade de f.r.v.v.r. goza de propriedades análogas à continuidade de funções de uma variável.

1. As funções constantes são contínuas.
2. As projeções $f_1(x, y) = x$ e $f_2(x, y) = y$ são funções contínuas.
3. A soma, o produto e o quociente de funções contínuas é ainda uma função contínua.
4. A composição (se bem definida) de funções contínuas é também uma função contínua (i.e., se $f(x, y)$ e $g(t)$ forem contínuas, então a função composta $g\big(f(x, y)\big)$ é ainda contínua).

Usando as propriedades anteriores, podemos, por exemplo, justificar a continuidade das funções

$$(x, y) \longmapsto \frac{x - 2y^5}{x^2 + 3y} \qquad \text{e} \qquad (x, y) \longmapsto \operatorname{arctg}\left(\frac{2 + e^{\frac{x}{y}}}{y^2 + \ln(x + y)}\right)$$

nos respetivos domínios. Justifique detalhadamente!

Exercícios

1. Calcule, ou mostre que não existe, cada um dos limites:

   (a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^3}{x^2+y^2}$ (0)

   (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+2y^4}$ (não existe)

   (c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{e^{x-y}-1}{x-y}$ (1)

2. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{(x^2+1)(y^2+1)-1}{x^2+y^2}, & se \quad (x,y) \neq (0,0), \\ \beta, & se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad (\beta \in \mathbb{R}).$$

   (a) Calcule, caso exista, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

   (b) Diga, justificando, para que valor(es) de β a função f é contínua no ponto $(0,0)$. $(\beta = 1)$

3.4 Derivadas e gradientes

Considere-se uma função $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e (a, b) um ponto interior de D. Podemos pensar em derivar a função f em ordem a uma das variáveis, fixando momentaneamente a outra variável (como se fosse constante).
Vejamos como derivar em ordem a x:
Fixando $y = b$, considere-se a função ψ real de uma variável real dada por $\psi(x) = f(x, b)$. Diremos que f admite **derivada parcial** em ordem a x no ponto (a, b) se a função ψ for diferenciável no ponto a. O valor da derivada parcial em (a, b) será precisamente $\psi'(a)$:

$$\psi'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{\psi(a+h) - \psi(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h}.$$

Definição

Seja $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $(a, b) \in int(D)$. Chama-se **derivada parcial** de f em ordem a x no ponto (a, b) ao limite, caso exista em $\mathbb{R}$,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h}, \quad \text{e denota-se por } \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \text{ ou } f'_x(a, b) \text{ (ou } f_x(a, b)).$$

Derivadas parciais: interpretação geométrica

Geometricamente, a derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ dá-nos o declive da reta contida no plano $y = b$ e que é tangente no ponto $P = (a, b, f(a, b))$ à curva de interseção do gráfico de f com aquele plano.
As equações cartesianas de tal reta são

$$y = b, \quad z = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)\,(x - a).$$

▸ interpretação geométrica de $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$

Derivadas parciais

A derivação parcial em ordem à variável y define-se de modo análogo: fixando agora $x = a$, considere-se $\varphi(y) = f(a, y)$. Diremos que f admite **derivada parcial** em ordem a y no ponto (a, b) se a função (de uma variável) φ for diferenciável no ponto b. O valor da derivada parcial em (a, b) será precisamente $\varphi'(b) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\varphi(b+h) - \varphi(b)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a, b+h) - f(a, b)}{h}$.

Definição

Seja $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $(a, b) \in int(D)$. Chama-se **derivada parcial** de f em ordem a y no ponto (a, b) ao limite, caso exista em $\mathbb{R}$,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a, b+h) - f(a, b)}{h}, \qquad \text{e denota-se por } \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \text{ ou } f'_y(a, b) \text{ (ou } f_y(a, b)\text{)}.$$

Assim, $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$ dá-nos o declive da reta contida no plano $x = a$ e que é tangente no ponto $P = (a, b, f(a, b))$ à curva de interseção do gráfico de f com aquele plano. ▸ interpretação geométrica de $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$ Quais são as equações cartesianas dessa reta?

Derivadas parciais: exemplos

Nota: O processo de derivação parcial apresentado para funções de duas variáveis estende-se de forma natural a funções com um número qualquer de variáveis (com as devidas modificações).

Regra prática: Quando a função f está definida numa certa bola (vizinhança) por uma única expressão (derivável), a derivação em ordem a cada uma das variáveis pode ser realizada (nos pontos dessa bola) usando as regras de derivação já conhecidas em relação a essa variável, considerando as restantes variáveis como se fossem meras constantes nesse processo de derivação.

Exemplo (função de 2 variáveis)

Seja $f(x, y) = 4 - x^2 + e^{x+y^2}$. As derivadas parciais de f existem em todo o ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e são dadas por

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(4 - x^2 + e^{x+y^2}\right) = -2x + e^{x+y^2}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(4 - x^2 + e^{x+y^2}\right) = 2y\, e^{x+y^2}.$$

Exemplo (função de 3 variáveis)

Considere-se a função g definida por

$$g(x, y, z) = \operatorname{sen}(z^2) + \ln(x + y^2).$$

As derivadas parciais da função g existem nos pontos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tais que $x > -y^2$. Em tais pontos são dadas por

$$g'_x(x, y, z) = \frac{1}{x + y^2}, \quad g'_y(x, y, z) = \frac{2y}{x + y^2}, \quad g'_z(x, y, z) = 2z\cos(z^2).$$

ATENÇÃO: No caso de uma função não estar definida por uma única expressão analítica em qualquer bola que se considere centrada num dado ponto, então teremos de recorrer à própria definição para calcular as derivadas parciais nesse ponto. Tal ocorre no exemplo que se segue:

Derivadas parciais: exemplos

Exemplo

Considere-se a função definida em $\mathbb{R}^2$ por $f(x,y)=\begin{cases} xy\,, & \text{se} \quad x\neq y, \\ x^3\,, & \text{se} \quad x=y. \end{cases}$

Vamos calcular a derivada parcial de f em ordem a x em alguns pontos. Para pontos (x,y) tais que $x\neq y$ podemos simplesmente aplicar a regra prática e escrever

- $f'_x(x,y)=\dfrac{\partial}{\partial x}\big(xy\big)=y$. Por exemplo, $f'_x(1,2)=2$.

Mas nos pontos $(1,1)$ e $(5,5)$ tal regra não é aplicável (porquê ?). Temos:

- $f'_x(1,1)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h,1)-f(1,1)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(1+h)\cdot 1-1^3}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h}{h}=1.$
- Não existe $f'_x(5,5)$, pois não existe em $\mathbb{R}$ o limite

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(5+h,5)-f(5,5)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{5(5+h)-5^3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{5h-100}{h}=\lim_{h\to 0}\Big(5-\frac{100}{h}\Big).$$

Derivadas parciais de ordem superior

Nota: Para uma função $f(x,y)$ podemos considerar as derivadas parciais de primeira ordem como sendo também elas funções de duas variáveis reais:

$$(x,y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \qquad \text{e} \qquad (x,y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

(naturalmente definidas nos respetivos domínios de existência).
Derivando parcialmente as funções derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ obtemos **derivadas parciais de segunda ordem** da função f:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} := \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right); \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} := \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right); \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} := \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right); \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} := \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

É frequente usar-se também a seguinte notação alternativa respetiva:

$$f''_{xx}; \quad f''_{xy}; \quad f''_{yx}; \quad f''_{yy} \qquad \text{ou ainda} \qquad f_{xx}; \quad f_{xy}; \quad f_{yx}; \quad f_{yy}.$$

Nota: Existem exatamente 2^k derivadas parciais de ordem k.

Derivadas parciais de ordem superior: exemplo

Exemplo

Seja $f(x,y) = x + \operatorname{sen}(xy) - e^y$. Em todo o ponto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tem-se:

- $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 1 + y\cos(xy)\,;\qquad \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\cos(xy) - e^y\,;$
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -y^2 \operatorname{sen}(xy)\,;\qquad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -x^2 \operatorname{sen}(xy) - e^y\,;$
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial y}\Big(1 + y\cos(xy)\Big) = \cos(xy) - xy\operatorname{sen}(xy)\,;$
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial x}\Big(x\cos(xy) - e^y\Big) = \cos(xy) - xy\operatorname{sen}(xy).$

Nota: A igualdade entre as duas **derivadas mistas** do exemplo anterior não é uma mera coincidência. Tal verifica-se sempre sob certas condições relativamente gerais.

Derivadas parciais de ordem superior

Sejam $D \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto, $f : D \to \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{N}_0$. Diz-se que *f é de classe C^k em D* se f admite derivadas parciais contínuas até à ordem k em todo o ponto de D. Ser de classe C^0 significa ser "apenas" contínua.

Teorema (Teorema de Schwarz)

Seja $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $p \in int(D)$. Sejam x, y duas das variáveis da função f. Se as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ existem numa bola centrada em p e se $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ é contínua em p, então $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(p)$ também existe e

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(p) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(p).$$

A partir do Teorema de Schwarz podemos estabelecer o seguinte critério:

Corolário

Se f é de classe C^2 num aberto $D \subseteq \mathbb{R}^n$, então

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(p), \qquad \forall p \in D, \quad \forall i, j \in \{1, \ldots, n\}.$$

Derivadas direcionais

No contexto de uma variável, já sabemos que se uma dada função admite derivada finita num ponto então ela é necessariamente contínua nesse ponto. Para funções de várias variáveis seria então razoável pensar-se em obter informações sobre a continuidade a partir da existência das derivadas parciais. Mas tal não é possível como mostra o seguinte exemplo:

Exemplo

Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} 1\,, & \text{se} \quad xy \neq 0, \\ x+y\,, & \text{se} \quad xy = 0. \end{cases}$$

Temos $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1$. No entanto, f é descontínua em $(0,0)$.

E se uma função tiver derivadas finitas “segundo todas as direções“? Será que tal garantiria a continuidade?

Antes de responder importa esclarecermos o que são “derivadas segundo direções”.

Derivada direcional

Definição (Derivadas direcionais)

Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $p \in int(D)$ e $\vec{u}$ um vetor *unitário* (i.e., tal que $\|\vec{u}\| = 1$).
A **derivada direcional de f segundo $\vec{u}$ em p** é dada por

$$D_{\vec{u}} f(p) = \lim_{h \to 0} \frac{f(p + h\,\vec{u}) - f(p)}{h} \qquad \text{(se este limite existir em } \mathbb{R}\text{).}$$

Nota: Também se pode usar a notação $f'_{\vec{u}}$ em vez de $D_{\vec{u}} f$.

Para uma função de duas variáveis $f(x, y)$ e um ponto $p = (a, b)$, a derivada direcional $D_{\vec{u}} f(a, b)$ traduz a variação da cota de um observador quando se desloca na superfície $z = f(x, y)$, passa por $(a, b, f(a, b))$ e segue a direção e sentido de $\vec{u}$.

▸ derivada direcional: $f(x, y) = 4 - (x^2 + y^2)$

Derivadas direcionais

Ainda no contexto de funções de duas variáveis, se (a, b) é um ponto interior do domínio de f, as derivadas direcionais segundo os vetores $\vec{u} = (1, 0)$ e $\vec{v} = (0, 1)$ são, resp.

$$D_{\vec{u}}f(a, b) = \lim_{h\to 0} \frac{f\big((a, b) + h(1, 0)\big) - f(a, b)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$$

e

$$D_{\vec{v}}f(a, b) = \lim_{h\to 0} \frac{f\big((a, b) + h(0, 1)\big) - f(a, b)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a, b + h) - f(a, b)}{h} = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$$

Assim, as derivadas parciais são casos especiais de derivadas direcionais.

Tal é igualmente válido para funções de um qualquer número n de variáveis $x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n$, tendo-se

$$D_{e_i}f(p) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p),$$

(onde e_i é o i-ésimo vetor da base canónica de $\mathbb{R}^n$ e p é um ponto interior do domínio de f).

Derivadas direcionais

Voltemos ao exemplo anterior da função $f(x, y) = \begin{cases} 1\,, & \text{se} \quad xy \neq 0, \\ x + y\,, & \text{se} \quad xy = 0. \end{cases}$

Para qualquer vetor unitário $\vec{u} = (u_1, u_2)$ com $u_1 \neq 0$ e $u_2 \neq 0$, temos

$$\frac{f(0 + hu_1, 0 + hu_2) - f(0, 0)}{h} = \frac{f(hu_1, hu_2)}{h} = \frac{1}{h},$$

que não tem limite quando $h \to 0$. Assim, conclui-se que
f não possui derivadas direcionais na origem segundo vetores com direções diferentes dos dois vetores da base canónica (direção dos eixos coordenados).

Mas será esta a razão da descontinuidade de f? A resposta é negativa!

Existem funções que admitem derivadas segundo todas as direções num dado ponto e, ainda assim, são descontínuas nesse ponto.

Veja-se o próximo exemplo:

Derivadas direcionais

Exemplo

Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4}\,, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0\,, & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Seja $\vec{u} = (u_1, u_2)$ um qualquer vetor unitário. Vamos calcular $D_{\vec{u}} f(0,0)$:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+hu_1, 0+hu_2) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(hu_1)\cdot(hu_2)^2}{h\left[(hu_1)^2 + (hu_2)^4\right]} = \lim_{h\to 0} \frac{u_1 \cdot u_2^2}{u_1^2 + h^2 u_2^4}\,.$$

Então:

- $\mathbf{D_{\vec{u}} f(0,0) = \frac{u_2^2}{u_1}}$ **se $\mathbf{u_1 \neq 0}$** e $\mathbf{D_{\vec{u}} f(0,0) = 0}$ **se $\mathbf{u_1 = 0}$.**
- Mas f não é contínua em $(0,0)$, pois não existe limite neste ponto (basta considerar os limites restritos correspondentes a $x = 0$ e $x = y^2$).

Funções diferenciáveis

Como a existência de derivadas direcionais não garante por si só a mera continuidade, então a noção de “diferenciabilidade” para funções de várias variáveis será algo mais forte do que a mera existência daquelas derivadas.

- Funções de uma variável:
  f diferenciável em a $\quad\longleftrightarrow\quad$ o gráfico admite reta tangente em $(a, f(a))$, nomeadamente a reta de equação

  $$y = f(a) + f'(a)(x-a).$$

  Sendo

  $$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) \in \mathbb{R},$$

  então

  $$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)}{x-a} = 0 \;\Leftrightarrow\; \lim_{x\to a} \frac{f(x)-[f(a)+f'(a)(x-a)]}{x-a} = 0.$$

Repare-se que a última igualdade salienta o facto da diferença entre o valor da função num x próximo de a e o valor respetivo da reta tangente ao gráfico em $(a, f(a))$ tender mais rapidamente para zero do que a diferença $x - a$.

Funções diferenciáveis

A ideia anterior de *aproximação linear* da função pode ser generalizada a funções de mais variáveis, usando agora (hiper)*planos tangentes*. Para simplificar, considere-se f uma função de duas variáveis (x, y).
No caso de existirem as derivadas parciais $f'_x(a, b)$ e $f'_y(a, b)$ (e recordando o seu significado geométrico) o plano (tangente) que procuramos pode ser determinado a partir dos vetores (não colineares) $\big(1, 0, f'_x(a, b)\big)$ e $\big(0, 1, f'_y(a, b)\big)$. Tal plano terá a equação vetorial

$$(x, y, z) = \big(a, b, f(a, b)\big) + \lambda\big(1, 0, f'_x(a, b)\big) + \mu\big(0, 1, f'_y(a, b)\big), \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R},$$

Em analogia com o caso já conhecido, deveremos ter

- f "diferenciável" em (a, b) $\quad\longleftrightarrow\quad$ o gráfico admite "plano tangente" em $(a, b, f(a, b))$, de equação

$$z = f(a, b) + f'_x(a, b)(x - a) + f'_y(a, b)(y - b). \tag{2.1}$$

Um vetor normal a tal plano será $\big(f'_x(a, b), f'_y(a, b), -1\big)$ [verifique!]

Plano tangente, diferenciabilidade e gradiente

Definição (função diferenciável e plano tangente)

Sejam $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $(a, b) \in int(D)$. Diz-se que f é **diferenciável em (a, b)** se existirem as derivadas parciais $f'_x(a, b)$ e $f'_y(a, b)$ e

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x, y) - \left[\mathbf{f(a, b) + f'_x(a, b)(x - a) + f'_y(a, b)(y - b)}\right]}{\|(x, y) - (a, b)\|} = 0.$$

Nesse caso, o **plano tangente** ao gráfico de f no ponto $(a, b, f(a, b))$ é o plano definido pela equação (2.1).

Ao vetor $\nabla f(a, b) := \left(f'_x(a, b), f'_y(a, b)\right)$ chamamos **gradiente** de f no ponto (a, b). Usando o gradiente e o produto interno, o limite anterior escreve-se

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x, y) - \left[\mathbf{f(a, b) + \nabla f(a, b) \cdot \left((x, y) - (a, b)\right)}\right]}{\|(x, y) - (a, b)\|} = 0$$

e a equação do plano tangente é

$$z = f(a, b) + \nabla f(a, b) \cdot (x - a, y - b).$$

Plano tangente, diferenciabilidade e gradiente

Nota: A função L definida por

$$L(x, y) = f(a, b) + f'_x(a, b)(x - a) + f'_y(a, b)(y - b),$$

cujo gráfico é o plano tangente, designa-se pela linearização de f em (a, b) (é útil para aproximar os valores da função em pontos "próximos" de (a, b)).

A extensão do conceito de diferenciabilidade a funções com n variáveis é imediata:

Sejam $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$ e p um ponto interior de D. O vetor gradiente de f no ponto p é

$$\nabla f(p) := \left(f'_{x_1}(p), \ldots, f'_{x_n}(p)\right).$$

Definição (função diferenciável)

Uma função $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diz-se diferenciável num ponto $p \in int(D)$ se existirem as derivadas parciais de f nesse ponto e

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p) - \nabla f(p) \cdot (x - p)}{\|x - p\|} = 0.$$

Teorema (diferenciabilidade implica continuidade)

Se $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é diferenciável em $p \in int(D)$, então f é contínua em p.

Esquema da prova: Considere-se uma qualquer sucessão $(p_k)_k$ de pontos de $D \setminus \{p\}$ convergente para p, i.e., tal que $\lim_{k\to\infty} \|p_k - p\| = 0$. Provemos que a correspondente sucessão $\big(f(p_k)\big)_k$ das imagens converge para $f(p)$, i.e., $\lim_{k\to\infty} |f(p_k) - f(p)| = 0$. Tal decorre do enquadramento

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \color{blue}{|f(p_k) - f(p)|} \\
&\leq \left| \frac{f(p_k) - f(p) - \nabla f(p) \cdot (p_k - p)}{\|p_k - p\|} \right| \|p_k - p\| + |\nabla f(p) \cdot (p_k - p)| \\
&\leq \left| \frac{f(p_k) - f(p) - \nabla f(p) \cdot (p_k - p)}{\|p_k - p\|} \right| \|p_k - p\| + \|\nabla f(p)\| \, \|p_k - p\| \, ,
\end{aligned}
$$

(na última linha usou-se a desigualdade de Cauchy-Schwarz, cf. slide 4). Note-se que as quantidades nos extremos da cadeia de desigualdades anterior tendem ambas para zero quando $k \to \infty$.

Diferenciabilidade: propriedades

O seguinte resultado permite calcular de uma forma simples as derivadas direcionais de funções diferenciáveis.

Teorema (derivadas direcionais via gradiente)

Seja $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciável em $p \in int(D)$. Então f admite derivadas direcionais no ponto p segundo qualquer vetor (unitário) $\vec{u}$ e

$$D_{\vec{u}} f(p) = \nabla f(p) \cdot \vec{u}.$$

Muitas vezes não é fácil estudar a diferenciabilidade de uma função através da própria definição. Vejamos agora um critério que permite garantir a diferenciabilidade de uma forma relativamente simples.

Teorema (condição suficiente de diferenciabilidade)

Sejam $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $p \in int(D)$. Se f admite derivadas parciais numa bola centrada no ponto p e se essas derivadas são contínuas em p, então f é diferenciável em p. Em particular, se D é aberto e f é de classe C^1 em D, então f é diferenciável em todos os pontos de D.

Exemplo

1. A função $g(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ não é diferenciável no ponto $(0,0)$, porque não existe $\frac{\partial g}{\partial x}(0,0)$. Será g diferenciável nos restantes pontos?

2. A função $f(x,y)=4-(x^2+y^2)$ é diferenciável em todos os pontos de $\mathbb{R}^2$, uma vez que é de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$.

   - Gradiente num ponto genérico:
   $$\nabla f(x_0,y_0)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0),\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right)=(-2x_0,-2y_0).$$
   - Derivadas direcionais segundo um vetor $\vec{u}=(u_1,u_2)$ unitário no ponto $(1,1)$:
   $$D_{\vec{u}}f(1,1)=\nabla f(1,1)\cdot\vec{u}=(-2,-2)\cdot(u_1,u_2)=-2u_1-2u_2.$$
   - Plano tangente ao gráfico de f em $(1,1,2)$: ▸ esboço do plano tangente
   $$z=f(1,1)+\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)(x-1)+\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)(y-1)\Leftrightarrow 2x+2y+z-6=0.$$

Seja $f(x, y)$ diferenciável num ponto (a, b) tal que $\nabla f(a, b) \neq (0, 0)$. Suponha-se que um observador na posição $\big(a, b, f(a, b)\big)$ pretende deslocar-se na direção segundo a qual a função f cresce mais. A resposta passa por determinar o vetor (unitário) $\vec{u}$ segundo o qual a derivada direcional em (a, b) é máxima:

$$D_{\vec{u}}f(a, b) = \nabla f(a, b) \cdot \vec{u} = \|\nabla f(a, b)\|\|\vec{u}\| \cos\theta = \|\nabla f(a, b)\| \cos\theta,$$

onde θ é o ângulo formado entre os vetores $\nabla f(a, b)$ e $\vec{u}$.
Aquela quantidade é máxima quando $\theta = 0$, i.e., quando $\vec{u}$ é um vetor paralelo e com o mesmo sentido do gradiente $\nabla f(a, b)$. Assim:

A função f cresce mais no sentido do vetor gradiente. O valor máximo da derivada direcional $D_{\vec{u}}f(a, b)$ é $\|\nabla f(a, b)\|$ e ocorre quando $\vec{u}$ tem a mesma direção e sentido de $\nabla f(a, b)$.

Mais informações dadas pelo gradiente

Função de 2 variáveis: Seja f uma função diferenciável em (x_0, y_0). É possível mostrar (ver mais adiante) que o vetor gradiente $\nabla f(x_0, y_0)$ é perpendicular à (reta tangente à) curva de nível $f(x, y) = k$ que passa no ponto (x_0, y_0).

Definição (plano tangente a superfície de nível)

Seja $F : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável num ponto (x_0, y_0, z_0). Se $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq (0, 0, 0)$, o **plano tangente à superfície de nível** $F(x, y, z) = k$ que passa nesse ponto é dado pela equação

$$\nabla F(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0\,.$$

Exercício

Justifique que a definição de plano tangente a gráfico de uma função (de 2 variáveis) diferenciável é um caso particular da definição acima.

Mais informações dadas pelo gradiente

Exemplo (plano tangente e reta normal)

Vamos determinar o plano tangente à sup. esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ no ponto $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Esta pode ser interpretada como a superfície de nível 1 da função $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Assim, o plano tangente procurado é definido por

$$\nabla f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot\left(x-\frac{1}{2},y-\frac{1}{2},z-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow (1,1,\sqrt{2})\cdot\left(x-\frac{1}{2},y-\frac{1}{2},z-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0,$$

ou seja, através da eq. cartesiana $\quad x + y + \sqrt{2}\,z = 2.$

A eq. vetorial da reta normal à superfície que passa em $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ é

$$(x, y, z) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \mu\left(1, 1, \sqrt{2}\right), \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

As equações cartesianas desta reta são

$$x - \frac{1}{2} = y - \frac{1}{2} = \frac{z - \sqrt{2}/2}{\sqrt{2}}.$$

Algumas propriedades das funções diferenciáveis

Tal como para funções reais de uma variável real, a soma, o produto e o quociente de funções diferenciáveis são ainda funções diferenciáveis. As fórmulas são semelhantes ao caso de uma variável, mas com os gradientes no lugar das respetivas derivadas.

A composição de funções diferenciáveis é ainda diferenciável. Vejamos o caso mais simples envolvendo a composição com funções vetoriais de uma variável (um estudo mais aprofundado deste assunto ocorrerá em Cálculo III). Observe-se que, genericamente, o estudo de funções vetoriais, $r(t) = \big(r_1(t), \dots, r_n(t)\big)$, faz-se coordenada a coordenada. Por exemplo, a continuidade e a diferenciabilidade de $r(t)$ correspondem às propriedades respetivas de cada uma das funções coordenadas $r_j(t)$, $j = 1, \dots, n$.

Teorema (regra da cadeia)

Sejam $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $r : I \subseteq R \to \mathbb{R}^n$ tais que $r(I) \subseteq D$. Seja t_0 um ponto de acumulação de I tal que $r(t_0) \in int(D)$. Se r e f são diferenciáveis em t_0 e $r(t_0)$, resp., então $f \circ r$ é diferenciável em t_0 e

$$(f \circ r)'(t_0) = \nabla f(r(t_0)) \cdot r'(t_0).$$

Algumas propriedades das funções diferenciáveis

Exemplo

Sejam $f(x,y) = xy + e^x$ e $r(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$. Então

$$\begin{aligned}(f \circ r)'(t) &= \nabla f(r(t)) \cdot r'(t) = f'_x(\cos t, \operatorname{sen} t)\,(\cos t)' + f'_y(\cos t, \operatorname{sen} t)\,(\operatorname{sen} t)' \\ &= -(\operatorname{sen} t + e^{\cos t})\operatorname{sen} t + \cos t\,\cos t.\end{aligned}$$

Já foi observado no slide 49 que o gradiente ∇f num ponto é perpendicular à curva de nível k de f que passa nesse ponto. Vejamos porquê:
Se a curva de nível é a imagem de uma função $r(t)$ definida num intervalo I, então

$$(f \circ r)(t) = f(r(t)) = k\,, \quad \forall t \in I.$$

Se $r(t)$ for diferenciável podemos aplicar a regra da cadeia e concluir que

$$\nabla f(r(t)) \cdot r'(t) = (f \circ r)'(t) = 0\,, \quad \forall t \in I.$$

(logo o gradiente de f em cada ponto da curva é, de facto, ortogonal ao vetor tangente à curva no mesmo ponto (supondo tal vetor não nulo)).

Diferencial total

Considere-se novamente uma função f de duas variáveis (para simplificar a escrita). Suponha-se que $z = f(x, y)$ é diferenciável. Pretende-se analisar o efeito provocado na variável z quando ocorrem pequenas alterações nas variáveis independentes x e y. Denotando por dx e dy os acréscimos nas variáveis x e y, resp., o **diferencial total** de z (ou de f) é dado por

$$dz(a,b) = df(a,b) := \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\,dy.$$

O diferencial total poderá ser útil para aproximar os valores da função, uma vez que dz fornece uma boa aproximação para acréscimos $\triangle z$ da variável z quando dx e dy são suficientemente pequenos. Recordar, a propósito, a equação do plano tangente...

Diferencial total: exemplo de aplicação

Problema: Estimar a quantidade de material usado para construir uma caixa cilíndrica fechada de altura 3 e diâmetro 4 (em metros) sabendo que a espessura da folha metálica é de 0,004.

$$V(h,r) = \pi r^2 h \qquad \text{(volume de um cilindro de altura } h \text{ e raio da base } r\text{)}$$

Tendo em conta a espessura da folha, o diferencial do volume

$$dV = \frac{\partial V}{\partial h}\, dh + \frac{\partial V}{\partial r}\, dr\,,$$

indica uma estimativa para a quantidade de material que se procura. Temos

$$(h,r) = (3,2) \quad dh = 0,008 \quad dr = 0,004\,; \qquad \frac{\partial V}{\partial h}(3,2) = 4\pi\,, \quad \frac{\partial V}{\partial r}(3,2) = 12\pi.$$

Logo a estimativa pretendida é

$$dV = 4\pi \times 0,008 + 12\pi \times 0,004 = 0,25132\ldots$$

Nota: a quantidade exata de material é dada por
$V(3+0.008, 2+0.004) - V(3,2) = 0,25188\ldots$

Referências

- P. Carvalho, L. Descalço, *Cálculo Diferencial a várias variáveis: o essencial*, Sílabas & Desafios, 2016.
- F.R. Dias Agudo, *Análise Real, Vol. II*, Escolar Editora, 1990.
- A. Breda, J. Costa, *Cálculo com funções de várias variáveis*, McGraw-Hill, 1996.
- A. Caetano, Wiki de Cálculo (`http://calculo.wikidot.com`)
- Gráficos realizados no GeoGebra (cortesia de Ana Breda e de Isabel Brás).