MD 2021: Questão Defesa Nota (07/07/2021)

30 de junho de 2021 20:47

1 (a) Seja $G=(V,E)$ isomorfo a $H=(V',E')$, i.e., $G \cong H$. Supondo $V=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$ e $V'=\{w_1,w_2,\dots,w_n\}$, ordenando por ordem não crescente as listas de números

$$d_G(v_1),\ d_G(v_2),\ \dots,\ d_G(v_n)$$

$$d_H(w_1),\ d_H(w_2),\ \dots,\ d_H(w_n)$$

temos a sequência dos graus dos vértices de G e de H, respetivamente.

Basta mostrar que ambas as listas contêm os mesmos números.

Ora, considerando $f: V \to V'$ o isomorfismo entre G e H, i.e.,

$$\forall x,y \in V,\ xy \in E \iff f(x)f(y) \in E'.$$

Para qq vértice v_i, $y \in N_G(v_i) \iff v_i y \in E$, mas, $v_i y \in E \iff f(v_i)f(y) \in E'$ e, por conseguinte, $f(v_i)f(y) \in E' \iff f(y) \in N_H(f(v_i))$.

Ou seja, para qq $i \in \{1,2,\dots,n\}$,

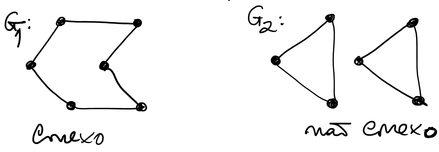
$$y \in N_G(v_i) \iff f(y) \in N_H(f(v_i)),$$

pelo que,

$$d_G(v_i) = |N_G(v_i)| = |N_H(f(v_i))| = d_H(f(v_i))$$

e, consequente/, ambas as listas contêm os mesmos números.

O recíproco não é verdadeiro, por exemplo, os grafos G_1 e G_2 têm igual sequência dos graus dos seus vértices $(2,2,2,2,2,2)$ e não são isomorfos:



Conexo não conexo

1b (i) $S_i \equiv (3,3,2,2,2,1)$

Sendo $G=(V,E)$ um grafo simples, tem de verificar-se

$$\sum_{v \in V(G)} d_G(v) = \underbrace{2|E(G)|}_{\text{par}},\ \text{contudo,}$$

neste caso, como o número de vértices de grau ímpar não é par $(3,3,1)$

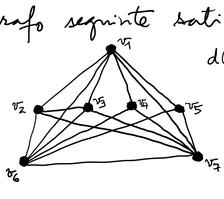
$$\sum_{v \in V(G)} d_G(v) = 2\times 3 + 3\times 2 + 1 = 13 \text{ ímpar},$$

logo, não existe G com a sequência de graus de vértices S_i.

(ii) $S_{ii} \equiv (6,6,6,4,4,3,3)$

O grafo seguinte satisfaz S_{ii}:

H:



$d(v_1)=d(v_6)=d(v_7)=6$

$d(v_2)=d(v_3)=4$

$d(v_4)=d(v_5)=3$

$$\sum_{v \in V(H)} d(v) = 3\times 6 + 2\times 4 + 2\times 3 = \underbrace{32}_{\text{Par}} = 2|E(H)|$$

(iii) $S_{iii} \equiv (6,6,6,4,4,2,2)$

Apesar do somatório dos graus de S_{iii} ser par $(3\times 6 + 2\times 4 + 2\times 2 = 30)$, não existe nenhum grafo simples satisfazendo S_{iii}, porque, cada um dos 3 vértices de grau 6 tem de ser adjacente a todos os outros vértices (i.e., adjacente a 6 dos 7 vértices), logo, qualquer vértice tem de ter, no mínimo, grau 3 (e não grau 2 como em S_{iii}).