Cálculo I - agr. 1 - 2018/19
Resolução do teste facultativo

1. $f(x) := \cos(\arctan(1-x^2))$.

(a) Domínio de definição D_f de f:

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : 1-x^2 \in \underbrace{D_{\arctan}}_{=\mathbb{R}} \wedge \arctan(1-x^2) \in \underbrace{D_{\cos}}_{=\mathbb{R}}\}$$

$$= \mathbb{R}.$$

(b) $$f'(x) = -\sin(\arctan(1-x^2)) \cdot \underbrace{\frac{1}{1+(1-x^2)^2}}_{>0} \cdot (-2x), \quad x \in \mathbb{R},$$

usando a regra da cadeia.

$\sin(\arctan(1-x^2)) > 0$ sse $\arctan(1-x^2) \in]0, \frac{\pi}{2}[$

sse $1-x^2 > 0$ sse $x^2 < 1$ sse $x \in]-1,1[$.

	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$2x$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$\sin(\arctan(1-x^2))$		$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

(pelo Critério de monotonia)

$$f(0) = \cos(\arctan 1) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$f(1) = \cos(\arctan 0) = \cos 0 = 1.$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Como f é par, $f(-1) = f(1) = 1$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Existe máximo absoluto, que é 1, sendo -1 e 1 maximizantes respetivos zantes. Não há outros máximos.

Existe um mínimo relativo, que é $\frac{\sqrt{2}}{2}$, sendo 0 o respetivo minimizante

Não existe mínimo absoluto: os valores da função estão todos acima de zero, aproximando-se de zero arbitrariamente quando a variável tende para $+\infty$ ou para $-\infty$, mas o valor zero nunca é atingido.

2. (a) $\int x^3 . e^{x^2} dx$

É dada a sugestão de primitivização por partes.

Claramente, a função a escolher para primitivar não deve ser x^3, pois isso transforma a expressão em algo mais complicado.

Por outro lado, e^{x^2} não tem primitiva fácil de calcular, a menos que esteja junto com o fator x.

Assim, escrevemos

$$\int x^3 . e^{x^2} dx = \int \underbrace{x^2}_{f(x)} \underbrace{x e^{x^2}}_{g'(x)} dx =$$

$$= x^2 . \frac{1}{2} e^{x^2} - \int \cancel{2} x . \frac{1}{\cancel{2}} e^{x^2} dx$$

$$= \frac{1}{2} x^2 e^{x^2} - \frac{1}{2} e^{x^2} + C \quad \text{(em intervalos)}$$

(b) $\int \frac{5x+3}{x^4+2x^3+3x^2} dx$

A função a primitivar é racional, logo segue-se o procedimento estabelecido para primitivar tais funções.

C.A.: $x^4+2x^3+3x^2 = x^2(x^2+2x+3)$;

$x^2+2x+3=0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-2\pm\sqrt{4-12}}{2}$: raízes complexas

$$\frac{5x+3}{x^2(x^2+2x+3)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{Cx+D}{x^2+2x+3}$$

$$\Rightarrow 5x+3 = Ax^2+2Ax+3A+Bx^3+2Bx^2+3Bx+Cx^3+Dx^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} B+C=0 \\ A+2B+D=0 \\ 2A+3B=5 \\ 3A=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1 \\ 3B=5-2=3 \\ — \\ — \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=1 \\ C=-1 \\ D=-1-2=-3 \end{cases}$$

$$\int \frac{5x+3}{x^4+2x^3+3x^2}\,dx = \int \frac{1}{x^2}\,dx + \int \frac{1}{x}\,dx - \int \frac{x+3}{x^2+2x+3}\,dx$$

$$= -\frac{1}{x} + \ln|x| - \int \frac{x+3}{x^2+2x+3}\,dx$$

Cálculo da última primitiva acima:

$$\int \frac{x+3}{x^2+2x+3}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+2x+3}\,dx + \int \frac{3}{x^2+2x+3}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int \frac{2x+2}{x^2+2x+3}\,dx - \int \frac{2}{x^2+2x+3}\,dx\right) + \int \frac{3}{x^2+2x+3}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2+2x+3| + 2\int \frac{1}{x^2+2x+3}\,dx$$

Cálculo da última primitiva acima:

C.A.: $x^2+2x+3 = x^2+2x+1-1+3 = (x+1)^2+2$.

$$\int \frac{1}{x^2+2x+3}\,dx = \int \frac{1}{(x+1)^2+2}\,dx = \int \frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1}\,dx$$

$\left.\begin{array}{l} u=\frac{x+1}{\sqrt{2}}; \\ du=\frac{1}{\sqrt{2}}dx \end{array}\right\} \longrightarrow$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{u^2+1}\,du = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg} u + C = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}} + C.$$

Assim, finalmente,

$$\int \frac{5x+3}{x^4+2x^3+3x^2}\,dx = -\frac{1}{x} + \ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x^2+2x+3|$$
$$-\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}} + C \quad \text{(em intervalos)}$$

(c) $\displaystyle\int \frac{\ln x+1}{x(1+(\ln x)^2)}\,dx$

É dada a sugestão de se fazer uma mudança de variável.
Considere-se $\ln x = t$, ou seja, $x = e^t$, para $t\in\mathbb{R}$.

$\frac{dx}{dt} = e^t > 0$, $t\in\mathbb{R}$.

Então
$$\int \frac{\ln x+1}{x(1+(\ln x)^2)}\,dx = \int \frac{t+1}{\cancel{e^t}(1+t^2)}\cdot\cancel{e^t}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2t}{1+t^2}\,dt + \int \frac{1}{1+t^2}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\ln|1+t^2| + \operatorname{arctg} t + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln(1+(\ln x)^2) + \operatorname{arctg}(\ln x) + C \quad \text{(em intervalos)}.$$

3. $\tanh x := \dfrac{\sinh x}{\cosh x}$.

(a) $\cosh x := \dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ é definida em todo o $\mathbb{R}$, sendo >0.

$$(\tanh x)' = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x}, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Regra da derivada do quociente e regra das derivadas do sinh e cosh

Fórmula fundamental das funções hiperbólicas

Como $(\tanh x)' > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, pelo Critério de monotonia tem-se que $\tanh x$ é estritamente crescente, logo injetiva, logo invertível.

(b) argtanh := "função inversa de tanh"

$$\begin{tikzcd} \tanh y = x \arrow[r, bend left, "\operatorname{argtanh}"] & y = \operatorname{argtanh} x \arrow[l, bend left, "\tanh"] \end{tikzcd}$$

Pela regra da derivada da função inversa, e atendendo a que $(\tanh x)' \neq 0$ (cf. alínea anterior), tem-se que

$$\frac{d}{dx}\operatorname{argtanh} x = \frac{1}{\frac{d}{dy}\tanh y} = \frac{1}{\frac{1}{\cosh^2 y}} =$$

$$= \cosh^2(\operatorname{argtanh} x), \ \forall x \in D_{\operatorname{argtanh}}.$$

Como, pela fórmula fundamental referida na alínea (a), $\cosh^2(\operatorname{argtanh} x) - \sinh^2(\operatorname{argtanh} x) = 1$, então (dividindo pela 1ª parcela) $1 - \tanh^2(\operatorname{argtanh} x) = \dfrac{1}{\cosh^2(\operatorname{argtanh} x)}$, logo $\cosh^2(\operatorname{argtanh} x) = \dfrac{1}{1-x^2}$, e portanto

$$\frac{d}{dx}\operatorname{argtanh} x = \frac{1}{1-x^2} \text{ no seu domínio.}$$

Aparte: Não era exigido, mas não é difícil verificar que $D_{\operatorname{argtanh}} =]-1,1[$, i.e., que $CD_{\tanh} =]-1,1[$.

De facto, pela alínea (a) já sabemos que tanh é estritamente crescente em $\mathbb{R}$, logo basta agora mostrarmos que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \tanh x = \pm 1$.

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}.$$

Quando $x \to -\infty$ obtém-se limite -1 imediatamente.

Quando $x \to +\infty$ levanta-se a indeterminação $\frac{\infty}{\infty}$ obtida através da Regra de Cauchy:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{e^{2x}\cdot 2}}{\cancel{e^{2x}\cdot 2}} = \lim_{x\to+\infty} 1 = 1.$$

[Em alternativa, no caso $x \to +\infty$ também se pode escrever $\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1-e^{-2x}}{1-e^{-2x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$.]