Universidade de Aveiro
Departamento de Matemática

Cálculo II - Agrupamento 4 **2022/23**

Folha 1: *Séries de Potências — Fórmula de Taylor — Série de Taylor*

---

1. Determine o domínio de convergência das seguintes séries de potências, indicando os pontos onde a convergência é simples ou absoluta.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n$; (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{(n-1)!}$; (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$;

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-3)^n}{2n+4}$; (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}x^n$; (f) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n!(x-2)^n}{n-1}$;

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}(x+2)^n$; (h) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{2+n^3}x^n$; (i) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{3n}}{\ln n}$;

(j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n6^n}(3x-2)^n$; (k) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n}(x-2)^n$; (l) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{\sqrt{2n+1}}x^n$.

2. Mostre que:

   (a) se $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ é absolutamente convergente num dos extremos do seu domínio de convergência, então também é absolutamente convergente no outro extremo;

   (b) se o domínio de convergência de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ é $]-r, r]$, então a série é simplesmente convergente em $x = r$.

3. Determine os polinómios de Taylor seguintes:

   (a) $T_0^3(x^3+2x+1)$;
   (b) $T_\pi^3(\cos x)$;
   (c) $T_1^3(xe^x)$;
   (d) $T_0^5(\operatorname{sen} x)$;
   (e) $T_0^6(\operatorname{sen} x)$;
   (f) $T_1^n(\ln x) \quad (n \in \mathbb{N})$.

4. Considere $f(x) = e^x$.

   (a) Escreva a fórmula de MacLaurin de ordem n da função f.
   (b) Mostre que o polinómio de MacLaurin de ordem n permite aproximar e^x no intervalo $]-1, 0[$, com erro inferior a $\frac{1}{(n+1)!}$.
   (c) Escolha um dos polinómios de MacLaurin de f e use-o para obter uma aproximação de $\frac{1}{\sqrt{e}}$, indicando uma estimativa para o erro cometido nessa aproximação.

5. Usando o resto de Lagrange, determine um majorante para o erro cometido na aproximação de $\operatorname{sen}(3)$ quando se usa o polinómio de Taylor de ordem 5 em torno do ponto $a = \pi$.

6. Mostre que o polinómio de MacLaurin de ordem 7 da função seno permite aproximar os valores desta função, no intervalo $[-1,1]$, com erro inferior a $\frac{1}{2}\times 10^{-4}$.

7. (a) Obtenha o polinómio de Taylor de ordem $n\in\mathbb{N}$ da função $f(x)=\frac{1}{x}$ no ponto $c=1$.

   (b) Determine um valor de n para o qual se garanta que o polinómio $T_1^n\left(\frac{1}{x}\right)$, obtido na alínea anterior, aproxime $\frac{1}{x}$ no intervalo $[0.9, 1.1]$, com erro inferior a 10^{-3}.

8. Determine o menor valor de n tal que o polinómio de MacLaurin de ordem n da função $f(x)=e^x$ aproxime $f(1)$ com erro inferior a 10^{-3}.

9. Mostre, usando a fórmula de Taylor, que $\ln(1+x)\leq x$, para todo $x>-1$.

10. Partindo da representação

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{+\infty}x^n, \quad -1<x<1,$$

determine uma representação em série de potências para cada uma das seguintes funções, indicando o intervalo onde tal representação é válida:

$$\text{(a)}\ \frac{1}{1-3x}\ ; \qquad \text{(b)}\ \frac{2}{2+x}\ ; \qquad \text{(c)}\ \frac{1}{x}\ .$$

11. Desenvolva a função $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$ em série de potências de $x-3$, indicando o maior intervalo onde o desenvolvimento é válido.