Questão 3 (5 val) Teste 2

a) Para $n \geq 2$:

$a_n = |\{$tais sequências de comprimento $n\}|$

$= |\{$tais seq. $\_\_\_\_\_\cdots\_\, X\}|$ (acabar em "X")

$+$

$|\{$tais seq. $\_\_\_\_\cdots\_\, 0\}|$ (acabar em "0")

$+$

$|\{$tais seq. $\_\_\_\cdots\_\, 1\}|$ (acabar em "1")

$= a_{n-1} + |\{$tais seq. $\_\_\_\cdots\_\, X0\}|$

$+ |\{$tais seq. $\_\_\cdots\_\, X1\}|$

(não contêm dois algarismos consecutivos)

$= a_{n-1} + 2a_{n-2}.$

as condições iniciais:

$a_0 = 1$ (a sequência $()$)

$a_1 = 3$ (as sequências (x), (0), (1))

b) Obtemos

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1+3x+\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^n + 2\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n$$

$$= 1+3x+x\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n\right) + 2x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$= 1+3x+x(A-1)+2x^2 A$$

$$= 1+2x+xA+2x^2A,$$

logo $A(1-x-2x^2)=1+2x$, portanto

$$A = \frac{1+2x}{1-x-2x^2} = \frac{1+2x}{(1+x)(1-2x)}$$

c) O polinómio caraterístico de

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$$ é

$$x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2),$$

portanto, a solução geral é dada por

$$\left(\alpha(-1)^n + \beta 2^n\right)_{n\in\mathbb{N}}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Consideramos agora os valores iniciais:

$$1 = \alpha + \beta$$
$$3 = -\alpha + 2\beta,$$

logo, $\beta = \frac{4}{3}$ e $\alpha = -\frac{1}{3}$.

Portanto, a solução é

$$a_n = -\frac{1}{3}(-1)^n + \frac{4}{3}2^n$$
$$= \frac{1}{3}\left((-1)^{n+1} + 2^{n+2}\right)$$