5. Equações Diferenciais Ordinárias

baseado no texto de Alexandre Almeida, Cálculo II, fev. 2018, pp. 51–92, e versões anteriores de slides de Cálculo II

Isabel Brás

UA, 20/4/2023

Cálculo II – Agrup. IV 22/23

Resumo dos Conteúdos

Equações Diferenciais, o que são?

Equações que envolvem uma função e as suas derivadas e/ou a variável que é o argumento dessa função.
Estas equações aparecem frequentemente quando se pretende modelar matematicamente fenómenos reais, em especial, naqueles de evolução temporal.

Exemplos:

1. Taxa de variação de temperatura de um objeto:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_m),$$

$T(t) \rightarrow$ temperatura do objeto,
$T_m \rightarrow$ temperatura do meio ambiente, $k \rightarrow$ constante positiva.

Exemplos (cont.):

2. Movimento harmónico de uma mola:

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

$m \rightarrow$ massa do objeto colocado na extremidade da mola vertical;
$x(t) \rightarrow$ deslocamento a partir da posição (inicial) de equilíbrio da mola;
$k > 0 \rightarrow$ constante de mola; Ver figura

3. Lei de Kirchhoff aplicada a uma malha constituída por uma bobine em série com uma resistência:

$$L\frac{dI}{dt} + RI = E(t),$$

onde L e R são constantes (indutância e resistência, respetivamente), $I(t)$ a intensidade de corrente e $E(t)$ a tensão da fonte de energia.

Equação diferencial ordinária

Definição:

Chama-se equação diferencial ordinária (EDO) de ordem n ($n \in \mathbb{N}$), a uma equação do tipo

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0 \qquad \text{(EDO)}$$

onde y é função (real) de x.

Terminologia associada:

y é designada por variável dependente;
x é designada por variável independente;
Uma EDO diz-se estar na forma normal quando se apresenta na forma

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right)$$

Notação alternativa: No slide anterior $y^{(n)}$ denota a derivada de ordem n da função y. Em alternativa, podemos usar a notação $\frac{d^n y}{dx^n}$ e (re)escrever a EDO na forma

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0.$$

Exemplos :

1. $$-y' + x^3 - 1 = 0$$

   é uma equação diferencial de ordem 1, onde x é a variável independente e y a variável dependente;

2. $$3t\,\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = \cos(t)$$

   é uma equação diferencial de ordem 2, onde t é a variável independente e x a variável dependente;

Solução de uma EDO

Definição

Chama-se solução da equação diferencial

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0\,,$$

num intervalo I, a toda a função $\varphi : I \to \mathbb{R}$, com derivadas finitas até à ordem n, tal que

$$F\left(x, \varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)\right) = 0\,, \qquad \forall x \in I.$$

Exemplo:

$\varphi_1(x) = \operatorname{sen} x$ e $\varphi_2(x) = \cos x - \operatorname{sen} x$ são duas soluções (em $\mathbb{R}$) de

$$y'' + y = 0$$

Identifique outras!

Mais terminologia associada a uma EDO de ordem n

Integral Geral: Família de soluções que se obtêm por técnicas de integração adequadas, que é definida, em geral, usando n constantes arbitrárias; o processo de obtenção dessa família de soluções é usualmente designado por integração(ou resolução) da EDO.

Integral Particular (ou solução particular): Solução que faz parte do integral geral;

Solução Singular: Solução que não se obtém a partir do integral geral;

Solução Geral: Conjunto de todas as soluções.

Exemplo: $(y')^2 - 4y = 0.$

- Determinação de um integral geral:

$$\begin{aligned} (y')^2 - 4y &= 0 \\ (y')^2 &= 4y \end{aligned} \qquad \Bigg| \qquad \begin{aligned} y' &= 2\sqrt{y}, \quad y \geq 0 \\ y'(y)^{-\frac{1}{2}} &= 2, \quad y > 0 \end{aligned}$$

  integrando em ordem a x,

$$\int y'(y)^{-\frac{1}{2}}\, dx = \int 2\, dx,\ y > 0\,,$$

  determinando as primitivas e simplificando, obtem-se o seguinte integral geral: $y = (x + C)^2$, onde $C \in \mathbb{R}$;

- Notar que $y = 0$ é também solução da EDO, mas não pertence ao integral geral obtido, esta solução é uma solução singular da EDO (em relação ao referido integral geral).
- Tomando no integral geral C=0 e C=1, obtem-se duas soluções particulares: $y = x^2$ e $y = (x + 1)^2$, respetivamente.

Problema de valores iniciais

Definição:

Chama-se problema de valores iniciais (PVI) (ou problema de Cauchy) a todo o problema que consiste em encontrar a solução (ou soluções) de uma dada equação diferencial satisfazendo certas condições (ditas condições iniciais) num mesmo ponto:

$$\begin{cases} F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0 \\ y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \quad \ldots \ , \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}. \end{cases}$$

Exemplo:

$y = -\frac{x^3}{6} + 1$ é solução do PVI

$$\begin{cases} y'' + x = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Verifique!

Existência e Unicidade de Solução para um PVI

- Nem todo o PVI admite solução;
- Caso exista solução para o PVI, esta pode não ser única;
- É possível provar que um PVI de primeira ordem na forma normal, *i.e.*, do tipo

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

admite uma e uma só solução (definida num intervalo centrado em x_0), desde que a função f satisfaça determinadas condições (*Teorema de Cauchy-Picard*). Não estudamos aqui este resultado, mas trataremos um caso particular a propósito das EDO lineares (mais à frente).

Problema de valores na fronteira

Definição:

Chama-se problema de valores na fronteira (ou problema de fronteira) a todo o problema que consista em encontrar a solução (ou soluções) de uma dada equação diferencial satisfazendo condições em dois ou mais pontos.

Exemplo:

O problema de fronteira

$$\begin{cases} y'' + x = 0 \\ y(0) + y'(1) = -\frac{1}{3} \\ y(1) + y'(0) = 0 \end{cases}$$

tem uma única solução. Qual é?

Equações de variáveis separáveis

EDO de primeira ordem da forma:

$$y' = \frac{p(x)}{q(y)}, \quad (\text{com } q(y) \neq 0)$$

para p e q dependentes apenas de x e de y, respetivamente.

Determinação dum integral geral

1. Escrever a equação na forma:

$$y'q(y) = p(x) \qquad (1)$$

2. Integrar ambos os membros de (1), para obter um integral geral da equação na seguinte forma implícita:

$$Q(y) = P(x) + C, C \in \mathbb{R},$$

onde $Q(y)$ é uma primitiva de $q(y)$ e $P(x)$ é uma primitiva de $p(x)$.

Exemplo 1: $y' = \frac{1}{y}e^x, y \neq 0$

Separando as variáveis, a equação toma a forma:

$$yy' = e^x$$

Integrando em ordem a x, que é o mesmo que:

$$\int y\, dy = \int e^x\, dx\,,$$

obtem-se $\frac{y^2}{2} = e^x + K,\ K \in \mathbb{R}$ e portanto

$$y^2 = 2e^x + C,\ C \in \mathbb{R}$$

é um integral geral da EDO.

Exemplo 2: $y' + xy = 0$

Separando as variáveis, a equação toma a forma:

$$\frac{1}{y}y' = -x\,, \qquad \text{para } y \neq 0,$$

integrando,

$$\int \frac{1}{y}\,dy = -\int x\,dx\,,$$

obtem-se, sucessivamente

$$\begin{aligned} \ln|y| &= -\frac{x^2}{2} + K,\ K \in \mathbb{R} \\ |y| &= e^{-\frac{x^2}{2}+K} \\ |y| &= Ae^{-\frac{x^2}{2}},\ A \in \mathbb{R}^+ \\ y &= Be^{-\frac{x^2}{2}},\ B \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \end{aligned}$$

Como $y = 0$ também é solução da EDO, obtem-se o integral geral:

$$y = Ce^{-\frac{x^2}{2}},\ C \in \mathbb{R}\,.$$

Equações Diferenciais Homogéneas

EDO de primeira ordem da forma:

$$y' = f(x, y)$$

onde $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é homogénea de grau zero, *i.e.*,
$f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y), \ \forall (x, y) \in \mathcal{D}, \ \forall \lambda \in \mathbb{R},$ tais que $(\lambda x, \lambda y) \in \mathcal{D}$.

Exemplo:

$$y' = \underbrace{\frac{x^2 + xy + y^2}{x^2}}_{f(x,y)}$$

f é homogénea de grau zero pois, desde que $\lambda \neq 0$,

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda^2 x^2 + \lambda x \lambda y + \lambda^2 y^2}{\lambda^2 x^2} = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2} = f(x, y)$$

Determinação dum integral geral de uma equação diferencial homogénea:

1. Certifique-se que a equação na forma:

$$y' = f(x, y) \qquad (1)$$

   é homogénea;

2. Em (1), fazer a mudança de variável $zx = y$ (ou seja, $z = \frac{y}{x}$) :

$$z + xz' = g(z), \qquad (2)$$

   onde $g(z) = f(1, z)$;

3. Integrar a equação (2), como equação de variáveis separáveis.
4. No integral geral obtido fazer $z = \frac{y}{x}$.

Voltando ao Exemplo do Slide 16

$$y' = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2}$$

Ora,

$$\frac{x^2 + xy + y^2}{x^2} = 1 + \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2 , \qquad x \neq 0,$$

Através da substituição $y = zx$, obtemos a equação de variáveis separáveis

$$\frac{1}{1 + z^2}\, z' = \frac{1}{x},$$

com integral geral dado por

$$\text{arctg}\; z = \ln|x| + C , \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Por conseguinte, um integral geral da equação homogénea dada tem a forma

$$\text{arctg}\, \frac{y}{x} = \ln|x| + C , \qquad i.e., \qquad y = x\; \text{tg}\, (\ln|x| + C) , \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Equações Diferenciais Redutíveis a EDOs Homogéneas:

$$y' = h\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right),$$

em que h é função real de variável real e $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$.

- 1º caso: $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$
  Equação de variáveis separáveis ou convertível a variáveis separáveis usando uma das mudanças de variáveis:
  $z = a_1x + b_1y$ ou $z = a_2x + b_2y$.
- 2º caso: $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$
  Neste caso o sistema linear $\begin{cases} a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0 \\ a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0 \end{cases}$ tem solução única (α, β).
  A mudança de variáveis
  $$x = u + \alpha \quad \text{e} \quad y = z + \beta$$
  transforma a equação numa equação homogénea nas variáveis u e z.

Exemplo

A equação
$$y' = \frac{x+y+1}{x-y+2}$$
é redutível a uma EDO homogénea.

- O sistema linear $\begin{cases} x+y+1=0 \\ x-y+2=0 \end{cases}$ tem solução única $(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$.

  Verifique!

- Tomando a mudança de variáveis $x = u - \frac{3}{2}$ e $y = z + \frac{1}{2}$, a equação torna-se na seguinte equação homogénea:

$$z' = \frac{u+z}{u-z}$$

Equações Diferenciais Exatas

Uma equação da forma

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0,$$

onde $M, N\colon D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ são contínuas e D é aberto, diz-se uma equação diferencial exata se existir $F\colon D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F \in \mathcal{C}^1(D)$, tal que

$$dF = M(x,y)dx + N(x,y)dy\,, \tag{1}$$

i.e., $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = M(x,y)$ e $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = N(x,y)$.

Resolver uma equação diferencial exata é encontrar uma função F (nas condições descritas). A família de funções

$$F(x,y) = C, C \in \mathbb{R}\,,$$

forma o conjunto das soluções da equação (1).

Exemplo:

$$y^2dx + 2xy\,dy = 0$$

Esta equação é exata se existir $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) &= M(x,y) = y^2 && (2)\\
\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) &= N(x,y) = 2xy && (3)
\end{aligned}$$

De (2) conclui-se que

$$F(x,y) = y^2x + \phi(y)\,,$$

derivando em ordem a y e conjugando com (3), $\phi(y) = C,\ C \in \mathbb{R}$.
Deste modo, a equação é exata e o conjunto das suas soluções é

$$y^2x = C, C \in \mathbb{R}\,.$$

Caracterização das EDO exatas em abertos simplesmente conexos

Conjuntos abertos simplesmente conexos:

Um conjunto simplesmente conexo em $\mathbb{R}^2$ é aquele que não apresenta "buracos"[a]. Exemplos de abertos simplesmente conexos:

$\mathbb{R}^2$; $\quad]a,b[\times]c,d[$, onde $a,b,c,d \in \mathbb{R}$, $a<b$ e $c<d$;

bolas abertas; semiplanos abertos.

[a] A definição rigorosa ultrapassa o âmbito desta u.c., trabalharemos com casos dentro dos exemplos dados.

Proposição:

Sejam $M, N\colon \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $M, N \in \mathcal{C}^1(\mathcal{D})$, e $\mathcal{D}$ aberto simplesmente conexo.

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

é uma equação diferencial exata se e só se $\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x,y)$.

Exemplos de classificação de EDO em exatas/não exatas

1. $y^2 dx + 2xy\, dy = 0\,.$

   Sejam $M(x,y) = y^2$ e $N(x,y) = 2xy$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Como

   $$\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x,y) = 2y\,,$$

   a equação é exata (por aplicação da proposição do slide anterior).

2. $(3y + 4xy^2)\, dx + (2x + 3yx^2)\, dy = 0\,.$

   Sejam $M(x,y) = 3y + 4xy^2$ e $N(x,y) = 2x + 3yx^2$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Como

   $$\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) \neq \frac{\partial N}{\partial x}(x,y)\,,$$

   a equação não é exata (por aplicação da proposição do slide anterior).

Fatores integrantes para EDO redutíveis a exatas

Uma função não nula $\mu(x,y)$ diz-se um fator integrante da equação (não exata)

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

se a equação

$$\mu(x,y)M(x,y)\,dx + \mu(x,y)N(x,y)\,dy = 0$$

é diferencial exata.

Exemplo:

A equação $(3y+4xy^2)\,dx + (2x+3yx^2)\,dy = 0$ não é exata. Mas

$$x^2y(3y+4xy^2)\,dx + x^2y(2x+3yx^2)\,dy = 0$$

é exata [Verifique!]. Assim, $\mu(x,y) = x^2y$ é um fator integrante da equação $(3y+4xy^2)\,dx + (2x+3yx^2)\,dy = 0$.

Equações Diferenciais Lineares de Primeira Ordem:

$$a_0(x)\, y' + a_1(x)\, y = b(x)$$

onde a_0, a_1, b são funções definidas num certo intervalo I, com $a_0(x) \neq 0$ para todo $x \in I$. Deste modo, esta equação pode tomar a seguinte forma:

$$y' + p(x)\, y = q(x).$$

Quando $b \equiv 0$ ($q \equiv 0$), a equação diz-se incompleta ou homogénea.

Exemplos:

- $y' + xy = 1$ equação diferencial linear de 1.ª ordem completa.
- $y' + xy = 0$ equação diferencial linear de 1.ª ordem incompleta (ou homogénea).

Note que, se $q \equiv 0$ ou se p e q forem funções constantes a EDO é de variáveis separáveis.

Resolução de uma EDO Linear de 1.ª Ordem usando um Fator Integrante

Para resolver a equação
$$y' + p(x)\, y = q(x).$$
pode multiplicar-se ambos os membros pelo fator integrante $\mu(x) = e^{P(x)}$, onde $P(x)$ é uma primitiva de $p(x)$, e integrar de seguida em ordem a x.

Exemplo 1: A EDO do Slide 15, $y' + xy = 0$, que resolvemos como equação de variáveis separáveis, é uma EDO linear de 1.ª ordem. Podemos resolvê-la, mais rapidamente, usando o fator integrante $\mu(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$.
Multiplicando ambos os membros da equação por $\mu(x)$ obtemos
$$e^{\frac{x^2}{2}} y' + e^{\frac{x^2}{2}} xy = 0\,, \qquad i.e., \qquad \frac{d}{dx}\left(e^{\frac{x^2}{2}} y\right) = 0.$$
Integrando vem
$$e^{\frac{x^2}{2}} y = C\,, \qquad C \in \mathbb{R}.$$
Assim, um integral geral da equação linear é
$$y = C\, e^{-\frac{x^2}{2}}\,, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Resolução de uma EDO Linear de 1.ª Ordem usando um Fator Integrante

Exemplo 2:

$$y' - y = -e^x$$

Como uma primitiva de $p(x) = -1$ é $P(x) = -x$, um fator integrante da EDO é e^{-x}.
Multiplicando ambos os membros da equação por e^{-x} obtemos

$$e^{-x}y' - e^{-x}y = -1$$

i.e,

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-x}y\right) = -1.$$

Integrando vem

$$e^{-x}y = \int(-1)\,dx = -x + C\,, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Assim, um integral geral da equação linear é

$$y = (C - x)\,e^x\,, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

PVI associado a EDO Linear de Primeira Ordem:

Teorema (existência e unicidade de solução):

Se p e q são funções contínuas num intervalo I, então o problema de Cauchy

$$\begin{cases} y' + p(x)\, y = q(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

tem nesse intervalo uma e uma só solução.

Exemplo:

O problema de Cauchy

$$\begin{cases} y' - \ y = -e^x \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

tem como solução única $y = -xe^x$, para $x \in \mathbb{R}$. Porquê?

Equações de Bernoulli:

$$y' + a(x)\, y = b(x)\, y^{\alpha}\,, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

- Se $\alpha = 0$ ou $\alpha = 1$, a equação é linear de 1.ª ordem.
- Se $\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq 1$, a equação é redutível a uma EDO linear de 1.ª ordem, usando a mudança de variável $z = y^{1-\alpha}$.
  De facto, a equação de Bernoulli pode escrever-se na forma

$$y^{-\alpha} y' + a(x)\, y^{1-\alpha} = b(x)$$

(eventualmente com $y \neq 0$). Com a substituição $z = y^{1-\alpha}$, chegamos à equação linear de 1.ª ordem

$$z' + (1-\alpha) a(x)\, z = (1-\alpha)\, b(x)\,,$$

Exemplo:

A equação

$$y' + y = e^x \, y^2$$

é uma equação de Bernoulli (com $\alpha = 2$). Fazendo $z = 1/y$ $(y \neq 0)$ obtemos

$$z' - z = -e^x$$

cujo integral geral é

$$z = (C - x)\, e^x \,, \qquad C \in \mathbb{R},$$

Ver slide 28

Assim, um integral geral da equação de Bernoulli é

$$y = \frac{e^{-x}}{C - x}\,, \quad C \in \mathbb{R}$$

Aplicação ao Estudo das Trajetórias Ortogonais

Definições

- Duas curvas planas dizem-se ortogonais num ponto comum às duas se as retas tangentes a uma e a outra forem perpendiculares
- Uma curva que interseta ortogonalmente todas as curvas de $\mathcal{F}$ diz-se uma trajetória ortogonal a $\mathcal{F}$.

Seja $\mathcal{F}$ uma família de curvas tal que, em cada um dos seus pontos (x_0, y_0), $f(x_0, y_0)$ representa o declive da reta tangente à curva nesse ponto. Neste caso,

- $\mathcal{F}$ é dada pelo integral geral da equação $y' = f(x, y)$.
- A família das tajetórias ortogonais a $\mathcal{F}$ é dada pelo integral geral da equação

$$y' = -\frac{1}{f(x, y)}$$

Aplicação ao Estudo das Trajetórias Ortogonais (cont.)

Procedimento prático para a determinação das trajetórias ortogonais:

1. Determinar a equação diferencial associada à família dada;
2. Escrever a equação diferencial das trajetórias ortogonais $[y' \rightsquigarrow -1/y']$;
3. Integrar a equação obtida no ponto anterior.

$$\mathcal{F}: \quad y = kx, k \in \mathbb{R}$$

Exemplo

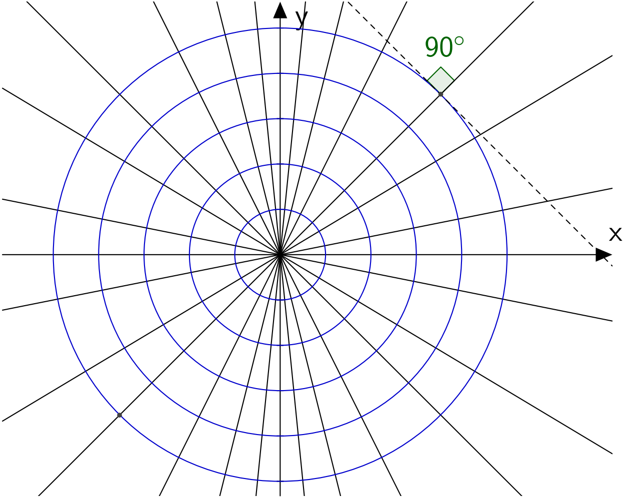
$\mathcal{F}$ é dada pelo integral geral da equação $y' = \frac{y}{x}$, $x \neq 0$, (verifique!).
Assim, a família de trajetórias ortogonais a $\mathcal{F}$ é o integral geral da equação

$$y' = -\frac{x}{y}, \ , \ y \neq 0 \qquad \text{(verifique!)}$$

Portanto, a família de trajetórias ortogonais a $\mathcal{F}$ é

$$x^2 + y^2 = C, \quad C \in \mathbb{R}^+ \qquad \text{(verifique!)}$$

Exemplo–ilustração gráfica



Equações Lineares de Ordem Arbitrária:

$$a_0(x)\,y^{(n)} + a_1(x)\,y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)\,y' + a_n(x)\,y = b(x)$$

onde

$b\colon I \to \mathbb{R}$;

$a_i\colon I \to \mathbb{R}$, $i = 0, \ldots, n$, com $a_0(x) \neq 0$ para todo $x \in I$.

$\downarrow$

coeficientes da equação

- Se $b \equiv 0$, a equação diz-se incompleta (ou homogénea); Caso contrário, a equação diz-se completa (ou não homogénea);
- Se os coeficientes da equação são funções constantes, a equação diz-se de linear de coeficientes constantes.

Exemplos

1.
$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = 0$$

EDO linear homogénea de segunda ordem com coeficientes constantes;

2.
$$e^x\, y' - \cos x\, y = x$$

EDO linear completa de primeira ordem;

3.
$$y^{(5)} + 2y' = 0$$

EDO linear homogénea de quinta ordem com coeficientes constantes.

Equação homogénea associada a uma EDO linear

Se na equação

$$a_0(x)\,y^{(n)} + a_1(x)\,y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)\,y' + a_n(x)\,y = b(x)$$

tomarmos $b(x) \equiv 0$, obtemos a chamada equação homogénea associada.

Exemplo:

A equação homógenea associada à equação completa

$$y'' + y = \cos(x)$$

é a equação:

$$y'' + y = 0\,.$$

Solução geral de uma EDO linear completa

Teorema:

A solução geral de uma equação linear completa obtém-se adicionando uma qualquer sua solução (particular) à solução geral da equação homogénea associada.

Exemplo:

$$y' - 2y = e^{5x}.$$

A equação homogénea associada é a equação

$$y' - 2y = 0\,,$$

cuja solução geral é dada por $y_h = C\,e^{2x}$, com $C \in \mathbb{R}$. Uma solução da EDO completa é $y_p = \dfrac{1}{3}\,e^{5x}$ [Verifique!]. Assim, a solução geral da equação completa é

$$y = \underbrace{C\,e^{2x}}_{y_h} + \underbrace{\frac{1}{3}\,e^{5x}}_{y_p},\ C \in \mathbb{R}.$$

EDO linear homogénea – Conjunto das soluções

Considere-se a EDO:

$$a_0(x)\,y^{(n)} + a_1(x)\,y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)\,y' + a_n(x)\,y = 0 \tag{4}$$

onde $a_i\colon I \to \mathbb{R}$, $i = 0, \ldots, n$, com $a_0(x) \neq 0$ para todo $x \in I$.

Teorema:

Sejam $y\colon I \to \mathbb{R}$, $w\colon I \to \mathbb{R}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

(i) $y \equiv 0$ é solução de (4);

(ii) Se y e w são soluções de (4), então $y + w$ é solução de (4);

(iii) Se y é solução de (4), então αy é solução de (4);

Isto é, o conjunto das soluções de (4) é um subespaço vetorial do espaço vetorial das funções reais de variável real definidas em I.

EDO linear homogénea – Conjunto das soluções (cont.)

Teorema: Toda a equação linear homogénea de ordem n

$$a_0(x)\,y^{(n)} + a_1(x)\,y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)\,y' + a_n(x)\,y = 0,$$

num dado intervalo I ($a_0, a_1, \ldots a_n$ contínuas em I; $a_0(x) \neq 0$ para todo o $x \in I$) admite n soluções, $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, linearmente independentes e qualquer sua solução, y, pode escrever-se como sua combinação linear, *i.e.*,

$$y = C_1\varphi_1 + \cdots + C_n\varphi_n, \text{ para } C_j \in \mathbb{R}\,.$$

Qualquer conjunto de n soluções linearmente independente de uma EDO linear homogénea de ordem n é designado por sistema fundamental de soluções dessa equação. Na verdade, de acordo com o teorema anterior, um sistema fundamental de soluções é uma base do subespaço vetorial das soluções da EDOL homógenea.

Conjunto fundamental de soluções— matriz Wronskiana

Proposição:

Sejam $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ soluções de uma EDOL homogénea de ordem n, nas condições do slide anterior. $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$ é um conjunto fundamental de soluções se e só se a matriz

$$\mathcal{W}(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n) = \begin{bmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \ldots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & \ldots & \varphi_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \varphi_2^{(n-1)}(x) & \ldots & \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{bmatrix}$$

é invertível, para todo o $x \in I$.

A matriz $\mathcal{W}(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ é designada por matriz Wronskiana e ao seu determinante chama-se Wronskiano.

Exemplo:

$$y'' + y = 0 \tag{5}$$

$\varphi_1(x) = \cos x$, $\varphi_2(x) =$ sen x são soluções desta equação Ver slide 7.

Como $\mathcal{W}(\operatorname{sen} x, \cos x) = \begin{bmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ -\operatorname{sen} x & \cos x \end{bmatrix}$ é invertível, o Wronskiano é igual a 1,

$\{\varphi_1(x), \varphi_2(x)\}$ é sistema fundamental de soluções de (5).

Logo, a solução geral da equação é

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x,\ \ C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Observações:

1. A resolução de uma EDO linear homogénea reduz-se à determinação de um sistema fundamental de soluções. Todavia, para $n > 1$, não existe método geral que permita obter um tal conjunto de soluções.
2. Se a EDO linear homogénea tiver coeficientes constantes, um sistema fundamental de soluções pode ser obtido a partir do conhecimento das raízes do chamado polinómio caraterístico (ver slides seguintes).

EDO linear homogénea com coeficientes constantes

EDO linear homogénea de ordem n com coeficientes constantes tem a forma:

$$a_0\, y^{(n)} + a_1\, y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}\, y' + a_n\, y = 0 \ ,$$

onde $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ com $a_0 \neq 0$.
Polinómio associado (polinómio caraterístico):

$$P(r) = a_0\, r^n + a_1\, r^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\, r + a_n$$

As n raízes do polinómio P(r) permitem determinar n soluções linearmente independentes da equação homógenea, cada uma associada a cada uma dessas raízes (ver como no slide seguinte). Portanto, permitem determinar a solução geral da equação homógenea.

Construção dum sistema fundamental de soluções (base do subespaço das soluções) da EDO linear com coeficientes constantes e homogénea:

Considerem-se as raízes de P(r) identificadas e para cada uma delas real e para cada par delas complexas (se existirem) proceda-se à seguinte associação de soluções (no final do processo ter-se-à n soluções linearmente independentes):

- 1.º Caso: A raíz, r, é real simples.

  Solução: e^{rx}
- 2.º Caso: A raíz, r, é real de mutiplicidade k.

  Soluções: $e^{rx}, xe^{rx}, \ldots, x^{k-1}e^{rx}$
- 3.º Caso: As raízes são complexas conjugadas simples, $\alpha + \beta i$ e $\alpha - \beta i$.

  Soluções: $e^{\alpha x}\cos(\beta x) \quad \text{e} \quad e^{\alpha x}\,\mathrm{sen}\,(\beta x)$
- 4.º Caso: As raízes são complexas conjugadas, $\alpha + \beta i$ e $\alpha - \beta i$, com multiplicidade k.

  Soluções: $e^{\alpha x}\cos(\beta x)\,,\ \ x\,e^{\alpha x}\cos(\beta x)\,, \ldots,\ \ x^{k-1}e^{\alpha x}\cos(\beta x),$
  $e^{\alpha x}\ \mathrm{sen}\,(\beta x)\,,\ \ x\,e^{\alpha x}\ \mathrm{sen}\,(\beta x)\,, \ldots,\ \ x^{k-1}e^{\alpha x}\ \mathrm{sen}\,(\beta x)$

Exemplo: $y^{(5)} + 2y^{(4)} + 4y^{(3)} + 8y^{(2)} + 4y' + 8y = 0$

Polinómio característico: $r^5 + 2r^4 + 4r^3 + 8r^2 + 4r + 8$

Raízes do polinómio característico:

-2 (simples); $i\sqrt{2}$ e $-i\sqrt{2}$, raízes duplas;

Sistema fundamental de soluções:

$\{e^{-2x}\,,\ \cos(\sqrt{2}x)\,,\ x\cos(\sqrt{2}x)\,,\ \operatorname{sen}(\sqrt{2}x)\,,\ x\operatorname{sen}(\sqrt{2}x)\}$

Assim, a solução geral da equação dada é

$$y = B\,e^{-2x} + \left(C_1 + C_2x\right)\cos(\sqrt{2}x) + \left(D_1 + D_2x\right)\operatorname{sen}(\sqrt{2}x)\,,$$

com $B, C_1, C_2, D_1, D_2 \in \mathbb{R}$.

Como obter uma solução particular de uma EDO linear completa?

Método da variação das constantes — método de determinação de uma solução particular de uma equação linear completa que:

- pressupõe o conhecimento da solução geral da equação homogénea associada:

$$y_h = C_1\varphi_1(x) + \cdots + C_n\varphi_n(x)\,, \quad C_1, \ldots, C_n \in \mathbb{R},$$

  onde $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ é um sistema fundamental de soluções desta equação.

- procura obter uma solução particular da equação completa da forma

$$y_p = C_1(x)\varphi_1(x) + \cdots + C_n(x)\varphi_n(x)\ ,$$

  admitindo que as constantes são funções (de x) diferenciáveis, determinando-as da forma como é indicada no slide seguinte.

Método da variação das constantes (cont.)

1. As funções $C_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ determinam-se calculando as suas derivadas que constituem a solução do seguinte sistema de equações:

$$\left\{\begin{array}{l} C_1'\,\varphi_1 + \cdots + C_n'\,\varphi_n = 0 \\ C_1'\,\varphi_1' + \cdots + C_n'\,\varphi_n' = 0 \\ \qquad\qquad \vdots \\ C_1'\,\varphi_1^{(n-2)} + \cdots + C_n'\,\varphi_n^{(n-2)} = 0 \\ C_1'\,\varphi_1^{(n-1)} + \cdots + C_n'\,\varphi_n^{(n-1)} = \frac{b}{a_0} \end{array}\right. \tag{6}$$

2. Calculando primitivas $G_i(x)$, $i = 1, \ldots, n$, das funções que se obtêm da resolução do sistema anterior, podemos escrever a seguinte solução particular da equação completa:

$$y_p = G_1(x)\varphi_1(x) + \cdots + G_n(x)\varphi_n(x).$$

Observações relativas ao Método da variação das constantes:

O sistema (3) do slide anterior pode representar-se matricialmente:

$$\mathcal{W}(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)X = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{b}{a_0} \end{bmatrix}, \text{ onde } X = \begin{bmatrix} C_1' \\ \vdots \\ C_{n-1}' \\ C_n' \end{bmatrix}.$$

Como a matriz Wronskiana é invertível, o sistema tem solução única e pode usar-se o método de Cramer para a resolução do sistema. Este método pode ser vantajoso, em especial para $n = 2$.

Exemplo: $$y'' + y = \operatorname{cosec} x\,,\ \ x \in]0,\pi[\tag{7}$$

1. A solução geral da equação homogénea associada é

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x,\ \ C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

▸ Ver slide 42

2. Procure-se uma solução particular da forma

$$y_p = C_1(x)\cos x + C_2(x)\ \text{sen}\ x,$$

onde
$$\begin{bmatrix} \cos x & \text{sen}\ x \\ -\,\text{sen}\ x & \cos x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \operatorname{cosec} x \end{bmatrix}.$$

3. Resolvendo o sistema (usando a regra de Cramer):

$$C_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \text{sen}\ x \\ \operatorname{cosec} x & \cos x \end{vmatrix}}{1} = -1 \text{ e } C_2' = \frac{\begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\,\text{sen}\, x & \operatorname{cosec} x \end{vmatrix}}{1} = \operatorname{cotg} x$$

Exemplo (cont.):

4. Da resolução do sistema obteve-se $C_1'(x) = -1$ e $C_2'(x) = \text{cotg}\, x$. Logo, podemos tomar

$$C_1(x) = -x \quad \text{e} \quad C_2(x) = \ln(\text{sen}\ x)\,, \quad 0 < x < \pi\,.$$

Assim, uma solução particular é

$$y_p = -x\cos x + \text{sen}\ x\ \ln(\text{sen}\ x).$$

5. Logo, a solução geral da equação completa (7) é

$$\begin{aligned} y &= \underbrace{C_1\cos x + C_2\ \text{sen}\ x}_{y_h}\ \underbrace{-x\ \cos x + \text{sen}\ x\ \ln(\text{sen}\ x)}_{y_p}, \quad 0 < x < \pi, \\ &= (C_1 - x)\cos x + (C_2 + \ln(\text{sen}\ x))\ \text{sen}\ x\,, \quad 0 < x < \pi, \end{aligned}$$

onde C_1, C_2 são constantes reais arbitrárias.

Método dos Coeficientes Indeterminados:

- Método para determinar uma solução particular, aplicável às EDO lineares de coeficientes constantes completas

$$a_0\, y^{(n)} + a_1\, y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}\, y' + a_n\, y = b(x) \tag{8}$$

  com $b(x)$ da forma

$$b(x) = B_m(x)\, e^{\alpha x} \cos(\beta x) \quad \text{ou} \quad b(x) = B_m(x)\, e^{\alpha x} \operatorname{sen}(\beta x),$$

  onde $B_m(x)$ denota um polinómio de grau $m \in \mathbb{N}_0$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

- Neste caso, prova-se que existe uma solução particular da equação (8) do tipo

$$y_p(x) = x^k\, e^{\alpha x} \left(Q(x) \cos(\beta x) + R(x) \operatorname{sen}(\beta x) \right) \tag{9}$$

  onde:

  (i) k é a multiplicidade de $\alpha + i\beta$, se $\alpha + i\beta$ for raiz do polinómio caraterístico da equação homogénea associada a (8); Senão, $k = 0$;

  (ii) $Q(x)$, $R(x)$ são polinómios de grau m cujos coeficientes terão de ser determinados usando a EDO (8) e a expressão para a solução (9).

Exemplo (Cálculo de solução particular de uma EDO linear de coeficientes constantes completa, usando o método dos coeficientes indeterminados):

$$y' - 3y = e^{3x} \; .$$

Como

$$e^{3x} = P_m(x)\, e^{\alpha x} \cos(\beta x)$$

com $P_m(x) \equiv 1$ (grau zero), $m = 0$, $\alpha = 3$, $\beta = 0$ e 3 é raiz do polinómio característico, com multiplicidade 1, então a solução particular a procurar é da forma

$$y_p = x \; e^{3x} A \, , \quad \text{com } A \in \mathbb{R} \text{ a determinar.}$$

Substituíndo y_p e y_p' na equação:

$$\underbrace{A\, e^{3x} + 3Ax\, e^{3x}}_{y_p'} - 3(\underbrace{A\, x\, e^{3x}}_{y_p}) = e^{3x}$$

obtemos $(A-1)e^{3x} = 0$, e portanto $A = 1$. Assim, $y_p = xe^{3x}$.

Princípio de sobreposição

Teorema:

Suponha-se que y_1 é uma solução (particular) da equação

$$a_0(x)\, y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)\, y = b_1(x)\,,$$

e que y_2 é uma solução (particular) da equação

$$a_0(x)\, y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)\, y = b_2(x)\,.$$

Então $y_1 + y_2$ é uma solução (particular) da equação

$$a_0(x)\, y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)\, y' + a_n(x)\, y = b_1(x) + b_2(x).$$

PVI associado a uma EDO linear de ordem arbitrária

Teorema (existência e unicidade de solução):

Se $a_0(x), a_1(x), \ldots, a_{n-1}, a_n(x)$ e $b(x)$ são funções contínuas num intervalo I, $a_0(x) \neq 0$, para todo o $x \in I$, então o problema de Cauchy

$$\begin{cases} a_0(x)\, y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)\, y' + a_n(x)\, y = b(x) \\ \\ y(x_0) = \beta_0, y'(x_0) = \beta_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = \beta_{n-1}\,, \end{cases}$$

onde $x_0 \in I$ e β_i, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, são reais dados, tem nesse intervalo uma e uma só solução.

Exemplo: O problema de Cauchy

$$\begin{cases} y'' + \ y = 0 \\ y(0) = 0, y'(0) = 2 \end{cases}$$

tem uma solução única em $\mathbb{R}$. Porquê? e Qual?