Cálculo I - agr. 4 2020/21

2.º teste - turmas TP4B-2, TP4B-7

Resolução

1. (a) (35 pontos)

$$\int \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\cdot \operatorname{arctg} x - \int -\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$= -\frac{\operatorname{arctg} x}{x} + \int \frac{1}{x(1+x^2)}\,dx$$

$$= -\frac{\operatorname{arctg} x}{x} + \int \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\,dx$$

$$= -\frac{\operatorname{arctg} x}{x} + \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C,$$

C constante em intervalos.

C.A.: $\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{1+x^2}$

$\Rightarrow 1 = A + Ax^2 + Bx^2 + Cx$

$\Leftrightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ C=0 \\ A=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \\ C=0 \end{cases}$

(b) (40 pontos)

$$\int \frac{1}{x^2(1-x^2)}\,dx = \int \frac{1}{x^2(1-x)(1+x)}\,dx$$

$$= \int \frac{1}{x^2} + \frac{\frac{1}{2}}{1-x} + \frac{\frac{1}{2}}{1+x}\,dx$$

$$= -\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\ln|1-x| + \frac{1}{2}\ln|1+x| + C$$

$$= -\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C,$$

C constante em intervalos.

C.A.: $\frac{1}{x^2(1-x)(1+x)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{1-x} + \frac{D}{1+x}$

$\Rightarrow 1 = A(1-x^2) + Bx(1-x^2) + Cx^2(1+x) + Dx^2(1-x)$

$\Leftrightarrow 1 = A - Ax^2 + Bx - Bx^3 + Cx^2 + Cx^3 + Dx^2 - Dx^3$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -B+C-D=0 \\ -A+C+D=0 \\ B=0 \\ A=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=0 \\ C-D=0 \\ C+D=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=0 \\ C=\frac{1}{2} \\ D=\frac{1}{2} \end{cases}$

(c) (25 pontos)

$$\int \frac{\sqrt[4]{x}+x}{\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{t+t^4}{t^2}\,4t^3\,dt$$

$$= 4\int t^2 + t^5\,dt = 4\frac{t^3}{3} + 4\frac{t^6}{6} + C$$

$$= \frac{4}{3}x^{3/4} + \frac{2}{3}x^{3/2} + C,$$

C constante em intervalos.

C.A.: Mudança de variável dada por $x = t^4$, $t>0$

($\Leftrightarrow t = \sqrt[4]{x}$, $x>0$).

$\frac{dx}{dt} = 4t^3 > 0$ (sinal constante)

Em alternativa (em vez de seguir a sugestão):

$$\int \frac{\sqrt[4]{x}+x}{\sqrt{x}}\,dx = \int x^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}} + x^{1-\frac{1}{2}}\,dx = \frac{x^{-\frac{1}{4}+1}}{-\frac{1}{4}+1} + \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C$$

$$= \frac{4}{3}x^{3/4} + \frac{2}{3}x^{3/2} + C,$$ C constante em intervalos.

2. $A := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0 \le y \le \sqrt{x^2-x^4}\}$.

(a) (10 pontos)

$$x^2-x^4 \ge 0 \Leftrightarrow x^4 \le x^2 \Leftrightarrow x^2 \le 1 \Leftrightarrow -1 \le x \le 1$$

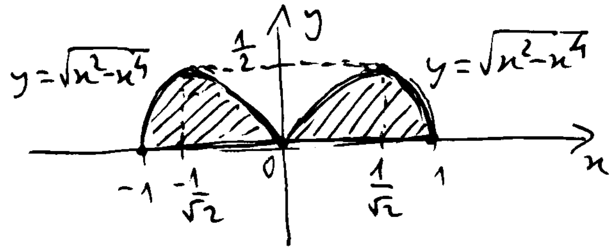
$\therefore$ Os valores de x para os quais $\sqrt{x^2-x^4}$ faz sentido são os do intervalo $[-1,1]$.

(b) (10 pontos)

$$\sqrt{x^2-x^4}=0 \Leftrightarrow x^2-x^4=0 \Leftrightarrow x^2(1-x^2)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x^2=1$$
$$\Leftrightarrow x=0 \vee x=-1 \vee x=1.$$

Os pontos pedidos são $(0,0)$, $(-1,0)$ e $(1,0)$.

(c) (20 pontos)



Região A a sombreado

NOTA: Não era muito importante determinar o máximo da função, a monotonia e as concavidades. Pelos dados anteriores, em cada um dos intervalos $[-1,0]$ e $[0,1]$ o gráfico está acima do eixo dos xx, exceto em -1, 0 e 1, em que está exatamente nesse eixo. E o gráfico é simétrico relativamente ao eixo dos yy, pois $\sqrt{x^2-x^4}$ é par.

Referimo-nos à função e ao gráfico de $y=\sqrt{x^2-x^4}$

(d) (30 pontos)

$$\text{Área de } A = 2\int_0^1 \sqrt{x^2-x^4}\,dx$$
$$= 2\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx$$
$$= -\left[\frac{(1-x^2)^{3/2}}{3/2}\right]_0^1$$
$$= -\frac{2}{3}(0-1) = \frac{2}{3}.$$

3. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ contínua; $a\in\mathbb{R}$; $(I_a f)(x) := \int_a^x f(t)\,dt,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

(a) (10 pontos)

Dado um qualquer $x\in\mathbb{R}$,

$$(I_a(I_a f))''(x) = \left(\int_a^x \int_a^t f(s)\,ds\,dt\right)''$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, atendendo a que $t\mapsto\int_a^t f(s)\,ds$ é contínua em $\mathbb{R}$, atendendo a que f é integrável (e até contínua) em qualquer intervalo limitado e fechado contendo o ponto a.

$$= \left(\int_a^x f(s)\,ds\right)' = f(x).$$

Novamente pelo Teorema Fundamental do Cálculo, agora atendendo à continuidade de f em $\mathbb{R}$.

(b) (20 pontos)

Dado um qualquer $x\in\mathbb{R}$,

$$(I_a(I_a f))(x) = \int_a^x \int_a^t f(s)\,ds\,dt$$

← Integração por partes

Na 2ª parcela usou-se o Teorema Fundamental do Cálculo, pela justificação dada nas últimas passagens da alínea (a)

$$= \left[t\cdot\int_a^t f(s)\,ds\right]_a^x - \int_a^x t\cdot f(t)\,dt$$

$$= x\cdot\int_a^x f(s)\,ds - a\cdot\underbrace{\int_a^a f(s)\,ds}_{=0} - \int_a^x t\cdot f(t)\,dt$$

Pela Linearidade do integral (e alterou-se primeiro o nome da variável de integração no primeiro integral)

$$= \int_a^x x f(t) - t f(t)\,dt = \underbrace{\int_a^x (x-t)\,f(t)\,dt}$$

É claro que isto é o mesmo que usar u em vez de t para variável de integração.

NOTA: Seria admissível usar-se a informação dada em (b) para se resolver a alínea (a) de um modo diferente do indicado acima.