1. a)

$$
\begin{aligned}
D_f &= \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq \tfrac{3-x^2}{x^2+1} \leq 1\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} : -x^2 - 1 \leq 3 - x^2 \wedge 3 - x^2 \leq x^2 + 1\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 \geq 0\} \\
&=]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[
\end{aligned}
$$

b) A função f é contínua em D_f e é diferenciável $int(D_f)$, sendo

$$f'(x) = \frac{-2\sqrt{2}\,x}{(x^2+1)^2\sqrt{\frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}}}$$

Como $f'(x) \neq 0$ para qualquer $x \in int(D_f)$, pelo Teorema de Fermat não existem extremos em $int(D_f)$. Donde os únicos candidatos a extremantes são -1 e 1.

Pelo sinal de f', concluímos que:

- f é estritamente crescente em $]-\infty, -1]$;
- f é estritamente decrescente em $[1, +\infty[$.

Por outro lado, $f(1) = f(-1) = \frac{\pi}{2}$.

Assim, o máximo global de f é $\frac{\pi}{2}$, sendo -1 e 1 os maximizantes globais. A função não tem outros extremos.

② a)

$$\int \underbrace{x}_{f(x)} . \underbrace{\sin x . \cos x}_{g'(x)} \, dx \underset{\text{por partes}}{=} x . \frac{\sin^2 x}{2} - \int \frac{1}{2} . \sin^2 x \, dx$$

C. Aux

$f'(x) = 1$

$g(x) = \frac{\sin^2 x}{2}$

$$= x . \frac{\sin^2 x}{2} - \frac{1}{2} \int \frac{1 - \cos(2x)}{2} \, dx$$

$$= x . \frac{\sin^2 x}{2} - \frac{x}{4} + \frac{1}{8} . \sin(2x) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$\boxed{\text{OU}}$

$$\int \underbrace{x}_{f(x)} . \underbrace{\sin x . \cos x}_{g'(x)} \, dx \underset{\text{por partes}}{=} x . \left(- \frac{\cos^2 x}{2}\right) - \int -\frac{1}{2} . \cos^2 x \, dx$$

C. Aux.

$f'(x)$

$g(x) = - \frac{\cos^2 x}{2}$

$$= - x . \frac{\cos^2 x}{2} + \frac{1}{2} \int \frac{1 + \cos(2x)}{2} \, dx$$

$$= - x . \frac{\cos^2 x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{1}{8} \sin(2x) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$\boxed{\text{OU}}$

$$\int x . \sin x . \cos x \, dx = \int x . \frac{1}{2} . \sin(2x) \, dx$$

$$= \frac{1}{2} . \int \underbrace{x}_{f(x)} . \underbrace{\sin(2x)}_{g'(x)} \, dx \underset{\text{por partes}}{=} \frac{1}{2} \left[- x . \frac{\cos(2x)}{2} - \int - \frac{\cos(2x)}{2} dx \right]$$

C. Aux

$f'(x) = 1$

$g(x) = - \frac{\cos(2x)}{2}$

$$= - x . \frac{\cos(2x)}{4} + \frac{1}{4} . \int \cos(2x) \, dx$$

$$= - x . \frac{\cos(2x)}{4} + \frac{1}{8} . \sin(2x) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

② b) $\int \frac{x-1}{x(x^2-4)}\,dx$

C.Aux. $x(x^2-4) = x(x-2)(x+2)$ O denominador fica, assim, fatorizado na forma irredutível

$$\underbrace{\frac{x-1}{x(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+2}}_{\text{decomposição na soma de frações simples}}, \quad \text{com } A, B, C \in \mathbb{R} \text{ a determinar}$$

$\times x(x^2-4)$ $\quad \times x(x+2)$ $\quad \times x(x-2)$

$x-1 = A(x^2-4) + B(x^2+2x) + C(x^2-2x)$

$= Ax^2 - 4A + Bx^2 + 2Bx + Cx^2 - 2Cx$

$\Leftrightarrow x-1 = (A+B+C)x^2 + (2B-2C)x - 4A$

Então $\begin{cases} A+B+C = 0 \\ 2B-2C = 1 \\ -4A = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 1/8 \\ C = -3/8 \\ A = 1/4 \end{cases}$

Portanto

$$\int \frac{x-1}{x(x^2-4)}\,dx = \int \frac{x-1}{x(x-2)(x+2)}\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{1}{x}\,dx + \frac{1}{8}\int \frac{1}{x-2}\,dx - \frac{3}{8}\int \frac{1}{x+2}\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\ln|x| + \frac{1}{8}\ln|x-2| - \frac{3}{8}\ln|x+2| + c,$$

$c \in \mathbb{R}$

② c) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{2-\cos x}\,dx$, com $x \in]0,\pi[$

C.Aux.

Mudança de variável: . $x = \arccos t$, $t \in]-1,1[$

. $dx = -\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$

. $x = \arccos t \underset{x\in]0,\pi[}{\Longleftrightarrow} t = \cos x$

Como $x \in]0,\pi[$, vem pelo formulário (5ª linha da 2ª tabela) que

. $\sin x = \sqrt{1-t^2}$

$$\int \frac{\sin x}{2-\cos x}\,dx \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Mud. variável} \\ x=\arccos t}}{=} \int \frac{\cancel{\sqrt{1-t^2}}}{2-t}\cdot\left(-\frac{1}{\cancel{\sqrt{1-t^2}}}\right)dt$$

$$= \int \frac{-1}{2-t}\,dt = \int \frac{1}{t-2}\,dt$$

$$= \ln|t-2| + c$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ t=\cos x}}{=} \ln|\cos x - 2| + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

ou $\ln(\underbrace{2-\cos x}_{>0\ \forall x \in]0,\pi[}) + c$, $c \in \mathbb{R}$

$\boxed{\text{OU}}$

C.Aux.

$u = 2-\cos x$

$du = \sin x$

$$\int \frac{\sin x}{2-\cos x}\,dx = \int \frac{1}{u}\,du$$

$$= \ln|u| + c$$

$$= \ln|2-\cos x| + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

3. $g(t)$: nº de gatos no instante t.

$$g(0)=637\ ; \quad g'(0)=100; \quad g''(t) = -\frac{200t}{(1+t^2)^2}, \quad t\geq 0$$

(a) $$g''(t) = -\frac{200t}{(1+t^2)^2} \Rightarrow g'(t) = \int -\frac{200t}{(1+t^2)^2}\,dt =$$

$$= -\frac{200}{2}\int (1+t^2)^{-2}\,2t\,dt = -100\,\frac{(1+t^2)^{-1}}{-1} + C_1 = \frac{100}{1+t^2} + C_1 .$$

Conjugando com $g'(0)=100$ sai que $\frac{100}{1+0^2}+C_1=100$, i.e., $C_1=0$. Assim, $g'(t)=\frac{100}{1+t^2}$, logo

$$g(t) = \int \frac{100}{1+t^2}\,dt = 100 \operatorname{arctg} t + C_2 .$$

Conjugando com $g(0)=637$ sai que $100 \operatorname{arctg} 0 + C_2 = 637$ i.e., $C_2 = 637$. Assim,

$$g(t) = 100 . \operatorname{arctg} t + 637, \quad t \geq 0.$$

(b) $$\lim_{t\to\infty} g(t) = \lim_{t\to\infty}(100 . \operatorname{arctg} t + 637) =$$

$\pi = 3,14$, como indicado

$$= 100 . \frac{\pi}{2} + 637 = \frac{314}{2} + 637$$

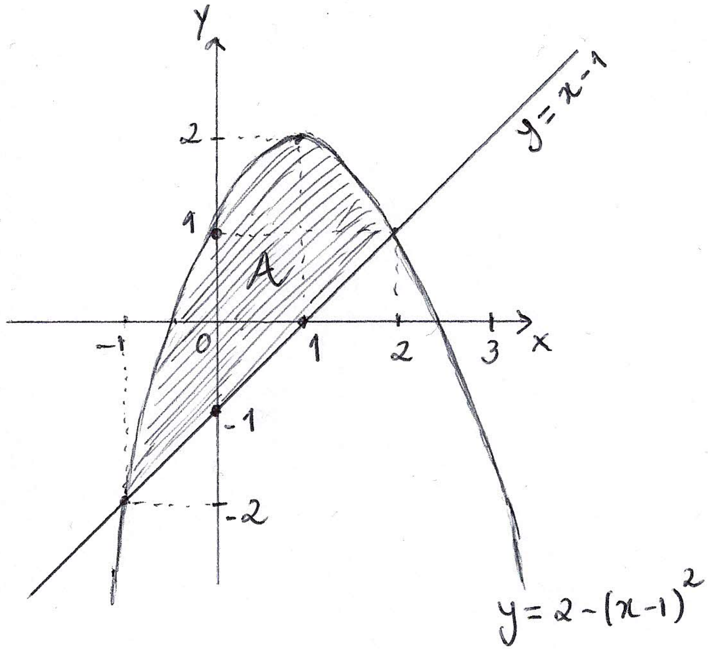
$$= 157 + 637 = 794 .$$

$g(t)$ é uma função crescente (visto pela sua expressão ou pelo facto de $g'(t)$ ser positiva), logo o nº de gatos não diminui. Além disso, no longo prazo ($t\to\infty$) tenderá a estabilizar à volta do valor 794.

2ª Parte

(4) $y = x - 1$

$y = 2 - (x-1)^2$



Pontos de interseção:

$$x - 1 = 2 - (x-1)^2$$

$$\Leftrightarrow x - 1 = 2 - x^2 + 2x - 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \quad \vee \quad x = 2$$

$$\text{área de } A = \int_{-1}^{2} \left(2 - (x-1)^2 - (x-1)\right) dx$$

$$= \int_{-1}^{2} \left(2 - x^2 + 2x - \cancel{1} - x + \cancel{1}\right) dx$$

$$= \int_{-1}^{2} (2 - x^2 + x)\, dx$$

$$= \left[2x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{2}$$

$$= 4 - \frac{8}{3} + 2 - \left(-2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{9}{2} \text{ unidades de área}$$

5.a) (i) A função $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x}}$ é contínua em $]0, \infty[$, portanto integrável em qualquer intervalo $[a, b]$, com $0 < a \leq b$. Como um limite de integração é infinito e, por outro lado, $\lim_{x \to 0} \dfrac{x+1}{\sqrt{x}} = +\infty$, então trata-se da combinação de um integral de 1.ª espécie com um de 2.ª espécie.

(ii) A função $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ é contínua em $]0, 1]$, portanto integrável em qualquer intervalo $[a, 1]$, com $0 < a \leq 1$. Como $\lim_{x \to 0} \dfrac{\ln x}{x} = -\infty$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{x} dx$ é um integral de 2ª espécie.

b) (i)Temos que considerar dois integrais. Por exemplo:

$$\int_0^1 \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx \text{ e } \int_1^{+\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx.$$

Temos que $\displaystyle\lim_{a \to +\infty} \int_1^a \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{a \to +\infty} [\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + 2\sqrt{x}]_1^a = +\infty$. Portanto, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx$ é divergente.

(ii) Temos que $\displaystyle\lim_{a \to 0^+} \int_a^1 \frac{\ln x}{x} dx = \lim_{a \to 0^+} [\frac{1}{2} \ln^2 x]_a^1 = -\infty$. Portanto, $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{x} dx$ é divergente.

⑥ a)

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2.n!)^3}{(3n)!}$

Tem-se que $a_n = \dfrac{(2.n!)^3}{(3n)!} \neq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$, logo podemos aplicar o critério de D'Alembert (ou critério do quociente):

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{2^3}.((n+1)!)^3}{(3n+3)!} \times \frac{(3n)!}{\cancel{2^3}.(n!)^3}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{(n+1)!}{n!}\right)^3 \times \frac{\cancel{(3n)!}}{(3n+3).(3n+2).(3n+1).\cancel{(3n)!}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} (n+1)^3.\left(\frac{\cancel{n!}}{\cancel{n!}}\right)^3 \times \frac{1}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^3 + P_1(n)}{27n^3 + P_2(n)} = \frac{1}{27} < 1$$

, logo a série é absolutamente convergente

onde $P_1(n)$ e $P_2(n)$ são polinómios de grau 2

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\frac{\pi}{2} - \arctan(n)}$

$a_n = \dfrac{(-1)^n}{\frac{\pi}{2} - \arctan(n)}$, $n \in \mathbb{N}$

Note-se que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\frac{\pi}{2} - \arctan(n)} = \frac{1}{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}^-} = \frac{1}{0^+} = +\infty$,

logo a sucessão $(a_n)_n$ não tem limite, em particular tem-se que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n \neq 0$. Assim, pela condição necessária de convergência (critério de divergência), a série é divergente.

⑥ b) $$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n+1}-\frac{2}{n+4}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(u_n-u_{n+3}\right)$$

é uma série de Mengoli (ou redutível, ou telescópica)

com $u_n=\dfrac{2}{n+1}$, $n\in\mathbb{N}$ e $p=3$

Então

$$S_n=u_1+u_2+u_3-\left(u_{n+1}+u_{n+2}+u_{n+3}\right)$$

$$=1+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-\frac{2}{n+2}-\frac{2}{n+3}-\frac{2}{n+4}$$

e $$\lim_{n\to+\infty}S_n=1+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-0-0-0$$

$$=\frac{13}{6}=\text{soma da série}$$

7. $F(x) := \int_{\sin(x)}^{0} e^{t^2}\,dt$; $\frac{\pi}{2}$ é minimizante local de F?

F está bem definida, pois e^{t^2}, sendo contínua em $\mathbb{R}$, é integrável em qq seu subintervalo fechado. Tb devido a e^{t^2} ser contínua, o Teorema Fundamental do Cálculo garante que F é diferenciável e que

$$F'(x) = \left(-\int_{0}^{\sin x} e^{t^2}\,dt\right)' = -e^{\sin^2 x}\cdot\cos x, \quad x\in\mathbb{R}.$$

usou-se tb a regra da cadeia

Como $e^{\sin^2 x} > 0$, o sinal de F' é o sinal de $-\cos x$.

Façamos um quadro de variação de F no intervalo $]0,\pi[$:

	0		$\frac{\pi}{2}$		π
F'		$-$	0	$+$	
F		$\searrow$		$\nearrow$	

Conclui-se que, de facto, $\frac{\pi}{2}$ é um minimizante local de F. Pode até acrescentar-se que $\int_{1}^{0} e^{t^2}\,dt$ é o correspondente mínimo local.