Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

Cálculo I - agr. 4 **2020/21**

exame final - 1.ª parte Duração: 1h15

- **Esta 1.ª parte termina com a palavra FIM e a indicação da cotação das questões.**
- **Todos os raciocínios devem ser convenientemente justificados e todas as respostas devem ser cuidadosamente redigidas.**

---

1. Seja $\mathcal{A} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x \leq y \leq -x^2 + 5x\}$.

   (a) Calcula os pontos de interseção dos gráficos de $y = 2x$ e de $y = -x^2 + 5x$.
   Nota: Para efeitos da resolução das alíneas seguintes informa-se que a solução é $(0, 0)$ e $(3, 6)$, mas nenhuma cotação terás na presente alínea se apenas verificares que estes pontos satisfazem as duas equações.

   (b) Representa geometricamente a região $\mathcal{A}$.

   (c) Calcula a área da região $\mathcal{A}$.

2. Considera o seguinte integral impróprio de 1.ª espécie:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx, \quad \text{onde } f(x) := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{(1-x)^3}} & \text{se } x \leq -2 \\ e^{-x} & \text{se } x > -2 \end{cases}.$$

   Determina a sua natureza e, no caso de ser convergente, calcula o seu valor.

3. (a) Estuda a natureza das seguintes séries numéricas. Em caso de convergência indica se é simples ou absoluta. (i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n + (-1)^n}{n^3 + 3n^2 + 4}$; (ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{2^n n!}$.

   (b) Determina a soma da seguinte série numérica convergente:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{(-3)^{n-1}}{2^{2n}} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right].$$

4. Seja $\alpha > 0$. Embora a função $\frac{1}{x^\alpha}$ não seja integrável em $[0, 1]$, define-se a quantidade $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\, dx$ como $\lim_{y \to 0^+} \int_y^1 \frac{1}{x^\alpha}\, dx$, caso este limite exista. Com esta definição, mostra que

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\, dx = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & \text{se } 0 < \alpha < 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha \geq 1 \end{cases}.$$

FIM

Cotação:

1. 2; 2. 1; 3. 4; 4. 3.