Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro

Álgebra Linear e Geometria Analítica — Agrup. IV

Exame Final; 17 de janeiro de 2018

Duração: **2h30min**

– Justifique todas as respostas e indique os cálculos efetuados –

[40pts] 1. Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 & -5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \\ -9 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

(a) Usando o método de eliminação de Gauss ou o de Gauss–Jordan, mostre que $[A|B] \sim [C|D]$.

(b) Indique: car(A), nul(A), det(A). A é invertível? Justifique.

(c) Escreva uma base do espaço das colunas de A.

(d) Classifique o sistema $AX = B$ e determine o conjunto das suas soluções.

[20pts] 2. Seja $\mathcal{P}$ o plano que contém os pontos $A(1, 2, 1)$, $B(0, 0, 3)$ e $C(1, -1, 1)$.

(a) Determine uma equação cartesiana do plano $\mathcal{P}$.

(b) Calcule a distância do ponto $Q(1, 2, 3)$ ao plano $\mathcal{P}$.

[50pts] 3. Considere em $\mathbb{R}^3$ os seguintes vetores:
$X_1 = (1, 0, 2)\,,\ X_2 = (0, 1, 0)\,,\ X_3 = (1, 0, -1)\,,\ X_4 = (-2, 3, 2)\,,$

(a) Mostre que $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3)$ é uma base de $\mathbb{R}^3$ e calcule a matriz de mudança de base da base canónica de $\mathbb{R}^3$ para $\mathcal{B}$, $M_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}$.

(b) Calcule as coordenadas de X_4 na base $\mathcal{B}$.

(c) Seja $\mathcal{V} = \langle X_2, X_3, X_4 \rangle$.

i. Determine uma base de $\mathcal{V}$ que contenha o vetor $X_2 + X_3$. Diga qual é a dimensão de $\mathcal{V}$.

ii. Verifique se o vetor $X = (1, 0, 0)$ pertence a $\mathcal{V}$.

[30pts] 4. Sejam $\mathcal{P}_2$ e $\mathcal{P}_1$ os espaços vetoriais dos polinómios de coeficientes reais de grau menor ou igual a 2 e de grau menor ou igual a 1, respetivamente. Considere a aplicação linear $\phi\colon \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_1$ tal que

$$\phi(at^2 + bt + c) = (c - b)t + (c - a)\,.$$

(a) Determine o núcleo de ϕ, identifique uma sua base e indique a sua dimensão.

(b) Determine a matriz representativa de ϕ para as bases $\mathcal{S} = (t^2, t^2+3, t^2+t+1)$ de $\mathcal{P}_2$ e $\mathcal{C} = (t, 1)$ base canónica de $\mathcal{P}_1$.

(c) Seja $p(t) \in \mathcal{P}_2$ tal que o seu vetor das coordenadas na base $\mathcal{S}$ é $[p(t)]_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & -3 \end{bmatrix}^T$. Calcule $\phi\,(p(t))$.

[50pts] 5. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

(a) Determine os valores próprios e subespaços próprios de A.

(b) A é diagonalizável? Justifique, indicando, em caso afirmativo, uma matriz diagonal semelhante a A e uma respetiva matriz diagonalizante.

(c) Obtenha uma equação reduzida da quádrica $X^TAX + BX - 3 = 0$ e classifique-a.

[10pts] 6. Prove a seguinte afirmação, se for verdadeira, ou indique um contra-exemplo, se for falsa:
Se X e Y são quaisquer vetores ortogonais de $\mathbb{R}^3$, então $||X+Y||^2 = ||X||^2 + ||Y||^2$.