

Calcula as primitivas das seguintes funções:

(a)  $\frac{\ln x}{x^3}$

Primitivando por partes, tem-se que, em qualquer intervalo contido no domínio  $D = \mathbb{R}^+$  da função,

$$\int \frac{\ln x}{x^3} dx = \int \frac{1}{x^3} \cdot \ln x dx = \int \left(-\frac{1}{2x^2}\right)' \ln x dx = -\frac{\ln x}{2x^2} - \int -\frac{1}{2x^2} \cdot \frac{1}{x} dx = -\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + C = -\frac{1+2\ln x}{4x^2} + C, C \in \mathbb{R}.$$

Repare-se que a (possível!) substituição  $x = e^t \in \mathbb{R}^+$ , com  $t \in \mathbb{R}$ , não iria simplificar a resolução, pois também a primitiva  $\int te^{-2t} dt$ , obtida desta forma, se calcula por partes.

(b)  $\frac{5}{(x-1)(2x^2+2x+1)}$

Esta alínea é parecida (com uma diferença importante: ver o ponto iii.) com a questão 3 do primeiro teste de 2021/22, cuja resolução contém mais alguns detalhes e observações.

- i. O fator  $2x^2 + 2x + 1$  do denominador é irredutível, pois não tem raízes reais:  $2x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm i}{2}$ .
- ii. A função racional é própria, com denominador de grau 3, logo existem 3 constantes  $A, B, C \in \mathbb{R}$  tais que

$$\frac{5}{(x-1)(2x^2+2x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{2x^2+2x+1} = \frac{(2A+B)x^2 + (2A-B+C)x + A-C}{(x-1)(2x^2+2x+1)}, \forall x \neq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2A+B=0 \\ 2A-B+C=0 \\ A-C=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-2 \\ C=-4 \end{cases}$$

sendo, então,  $\frac{5}{(x-1)(2x^2+2x+1)} = \frac{1}{x-1} + \frac{-2x-4}{2x^2+2x+1} = \frac{1}{x-1} - \frac{2x+4}{2x^2+2x+1}$ .

- iii. Sabe-se que uma primitiva da fração  $\frac{2x+4}{2x^2+2x+1}$  (própria, com denominador de segundo grau irredutível) é a combinação linear de  $G(x) = \ln(2x^2+2x+1)$ , com derivada  $G'(x) = \frac{4x+2}{2x^2+2x+1}$ , e de  $H$  (composição da arco tangente com um polinómio de grau 1 a determinar), que tem derivada  $H'(x) = \frac{\beta}{2x^2+2x+1}$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$  constante. Portanto,

$$\frac{2x+4}{2x^2+2x+1} = \alpha \frac{4x+2}{2x^2+2x+1} + \frac{\beta}{2x^2+2x+1} = \frac{4\alpha x + 2\alpha + \beta}{2x^2+2x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2} \\ \beta = 3 \end{cases} \text{ logo } \frac{2x+4}{2x^2+2x+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4x+2}{2x^2+2x+1} + \frac{3}{2x^2+2x+1}.$$

- iv. Para efetuar a primitivação quase imediata, é melhor reescrever  $\frac{3}{2x^2+2x+1}$  de uma forma mais adequada:

$$\frac{3}{2x^2+2x+1} = \frac{3}{2(x^2+x+\frac{1}{2})} = \frac{3}{2((x+\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4})} = \frac{3}{\frac{2}{4}((2x+1)^2+1)} = 3 \cdot \frac{2}{(2x+1)^2+1} = 3 \cdot \frac{(2x+1)'}{(2x+1)^2+1}.$$

- v. Pela propriedade da linearidade, as primitivas da função dada são, em intervalos contidos em  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ ,

$$\begin{aligned} \int \frac{5}{(x-1)(2x^2+2x+1)} dx &= \int \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{4x+2}{2x^2+2x+1} - \frac{3}{2x^2+2x+1} dx \\ &= \int \frac{(x-1)'}{x-1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{(2x^2+2x+1)'}{2x^2+2x+1} dx - 3 \int \frac{(2x+1)'}{(2x+1)^2+1} dx \\ &= \ln|x-1| - \frac{1}{2} \ln(2x^2+2x+1) - 3 \arctg(2x+1) + C, C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(c)  $\frac{x^{\frac{1}{6}}}{x^{\frac{1}{2}} + 2x^{\frac{1}{3}}}$

Para transformar a função dada numa função racional, cujo algoritmo de primitivação é conhecido, considere-se a mudança de variável  $x = t^6 \in \mathbb{R}^+$ , com  $t \in \mathbb{R}^+$ . Repare-se que a invertibilidade da função  $x = \phi(t)$  é garantida para qualquer  $t \geq 0$ , mas o valor  $t = 0$  corresponde a  $x = \phi(0) = 0$ , que não pertence ao domínio da função dada.

Assim, sendo  $x^{\frac{1}{6}} = t$ ,  $x^{\frac{1}{3}} = t^2$ ,  $x^{\frac{1}{2}} = t^3$  e  $dx = 6t^5 dt$ , em qualquer subintervalo de  $\mathbb{R}^+$  obtém-se:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^{\frac{1}{6}}}{x^{\frac{1}{2}} + 2x^{\frac{1}{3}}} dx &= \int \frac{t}{t^3 + 2t^2} 6t^5 dt = 6 \int \frac{t^4}{t+2} dt = 6 \int t^3 - 2t^2 + 4t - 8 + \frac{16}{t+2} dt \\ &= \frac{3}{2}t^4 - 4t^3 + 12t^2 - 48t + 96 \ln|t+2| + C = \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} - 4x^{\frac{1}{2}} + 12x^{\frac{1}{3}} - 48x^{\frac{1}{6}} + 96 \ln(x^{\frac{1}{6}} + 2) + C, C \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

onde a identidade  $t^4 = (t+2)(t^3 - 2t^2 + 4t - 8) + 16$ , utilizada na terceira passagem, resulta, por exemplo, da divisão dos polinómios  $t^4$  e  $t+2$ .