Universidade de Aveiro
Departamento de Matemática

Cálculo II - Agrupamento 4 **2022/23**

Folha 2: *Soluções*

---

1. Aplicar o Critério de Weierstrass (alínea (a)) e as propriedades da convergência uniforme (alíneas (b) e (c)).

2. (a) $e^{-x^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n} + \cdots, \quad x \in \mathbb{R}.$

   (b) $\cosh x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots, \quad x \in \mathbb{R}.$

   (c) $\operatorname{senh}(3x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{2n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!} = 3x + \frac{3^3}{3!} x^3 + \cdots + \frac{3^{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1} + \cdots, \ x \in \mathbb{R}.$

   (d) $2\cos^2 x = 1 + \cos(2x) = 1 + \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n}}{(2n)!} x^{2n}$

   $= 2 - \dfrac{4}{2!} x^2 + \dfrac{2^4}{4!} x^4 + \cdots + \dfrac{(-1)^n 2^{2n}}{(2n)!} x^{2n} + \cdots, \quad x \in \mathbb{R}.$

   (e) $\dfrac{1}{4+x^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^{n+1}} x^{2n} = \frac{1}{4} - \frac{x^2}{4^2} + \frac{x^4}{4^3} - \cdots + \frac{(-1)^n}{4^{n+1}} x^{2n} + \cdots, \quad x \in]-2, 2[.$

3. (a) $e^{-x}, \quad x \in \mathbb{R};$

   (b) $\dfrac{1}{1+x^3}, \quad x \in]-1, 1[.$

4. (a) $\ln(x+1) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{t+1}\, dt = \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad x \in]-1, 1[.$

   (Observação: a igualdade é também válida no ponto $x = 1$; a justificação pode ser encontrada no Texto de Apoio).

   (b) $(x+1)\ln(x+1) - x, \quad x \in]-1, 1[$
   (por integração termo a termo da série da alínea anterior).

5. (a) 1; (b) $\cosh(1)$; (c) $-3\ln(2/3)$; (d) $2\sqrt{e}$.

6. (a) —

   (b) $f(x) = \dfrac{2x}{(2-x)^2}.$

7. —

8. (a) $]1, 5[$.

   (b) $f'(4) = 1$.

9. (a) $xe^{x^3} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n+1}}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}.$

   (b) $\displaystyle\int_0^1 xe^{x^3} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3n+2)\, n!}.$

10. Representar e^{x^2} em série de MacLaurin e derivar a série termo a termo.

11. (a) $xe^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{n+1}, \qquad x \in \mathbb{R}.$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1) 2^n}{n!} = -1 - e^{-2}.$

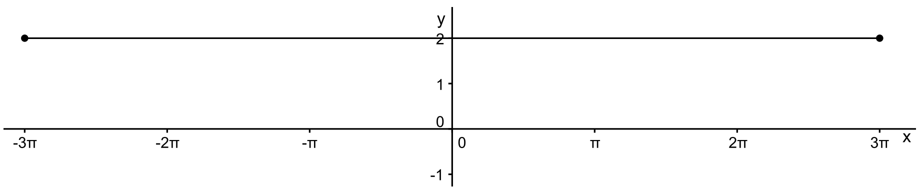
(c) $|R_0^2 f(x)| < \frac{1}{2} \times 10^{-3}.$

12. (a) $f(x) \sim \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^n \frac{4}{n^2} \cos(nx) + (-1)^{n+1} \frac{2}{n} \operatorname{sen}(nx) \right];$

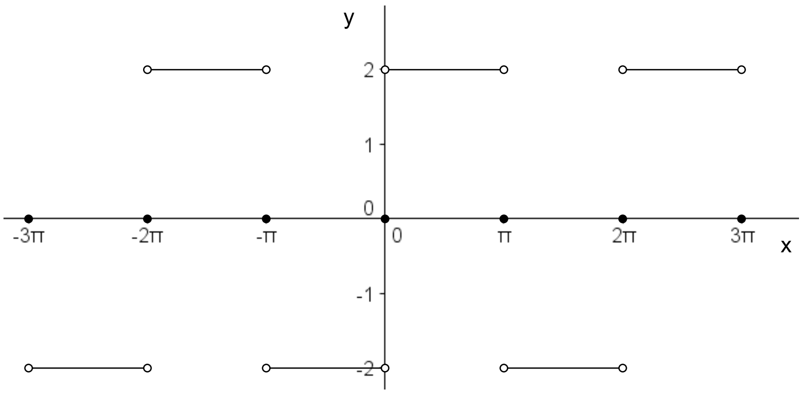
(b) $g(x) \sim \frac{\operatorname{senh}(\pi)}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} 2 \frac{\operatorname{senh}(\pi)}{\pi} \left[\frac{(-1)^n}{n^2+1} \cos(nx) + \frac{(-1)^{n+1} n}{n^2+1} \operatorname{sen}(nx) \right];$

(c) $h(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} 2 \frac{1-(-1)^n}{n\pi} \operatorname{sen}(nx) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n-1)\pi} \operatorname{sen}((2n-1)x).$

13. Soma da série de cossenos: $s(x) = 2$;



Soma da série de senos: $S(x) = \begin{cases} -2 & , \quad x \in]-\pi + 2k\pi, 2k\pi[\\ 0 & , \quad x = k\pi \\ 2 & , \quad x \in]2k\pi, \pi + 2k\pi[\end{cases} \qquad (k \in \mathbb{Z}).$



14. Série de Fourier de senos: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{\pi} \frac{k}{4k^2-1} \operatorname{sen}(2kx).$

A série de Fourier de cossenos reduz-se à função $\cos x$.

15. (a) $f(x) \sim \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{n^2} \cos(nx), \qquad x \in \mathbb{R}.$

(b) A função f é contínua e seccionalmente diferenciável em $\mathbb{R}$. Portanto, a soma da série coincide com a própria função f (em $\mathbb{R}$). Notar que $f(x) = x^2$ em $[-\pi, \pi]$.

(c) Tomar, em particular, $x = 0$ na representação indicada na alínea (b).

(d) Sugestão: aplique o Critério de Weierstrass.

(e) Integrar ambos os membros da igualdade em (b), tendo em conta o resultado indicado em (d).

16. (a) –

(b) Aplicar o Critério de Weierstrass para justificar a convergência uniforme. A soma é $s(x) = |\operatorname{sen} x|$, $x \in \mathbb{R}$.

(c) –

(d) $\frac{2-\pi}{4}$.