Álgebra Linear e Geometria Analítica

Agrupamento IV: Mestrado Integrado em Eng.ª Eletrónica e Telecomunicações | Mestrado Integrado em Eng.ª de Computadores e Telemática | Licenciatura em Eng.ª Informática

15 de Janeiro de 2020 Duração: 2h30

Exame Final

Justifique devidamente todas as suas respostas.

1. Considere o sistema de equações lineares nas incógnitas x, y e z

$$\begin{cases} \quad y + 2z = 1 \\ x + y + 3z = 0 \\ x \quad + z = -1 \end{cases}.$$

   (a) Construa a matriz ampliada do sistema e determine uma matriz escalonada equivalente por linhas à matriz ampliada do sistema.

   (b) Determine o conjunto de soluções do sistema.

2. Considere A e B, matrizes 4×4 tais que $\det(A) = 3$ e

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

   (a) Calcule $\det(B)$.

   (b) Justifique que B é invertível.

   (c) Calcule $\det(2A^T B^{-1})$.

3. Considere a base $\mathcal{S} = (X_1, X_2, X_3)$ de $\mathbb{R}^3$, com $X_1 = (1,0,1)$; $X_2 = (1,1,1)$; $X_3 = (0,1,1)$ e a base $\mathcal{T} = (Y_1, Y_2, Y_3)$ de $\mathbb{R}^3$ definida por $Y_1 = (1,0,0)$; $Y_2 = (1,1,0)$; $Y_3 = (0,-1,1)$.

   (a) Determine a matriz de mudança de base de $\mathcal{S}$ para $\mathcal{T}$.

   (b) Usando a matriz de mudança de base obtida, represente o vetor $Z = -X_1 - X_2 + 2X_3$ como combinação linear dos vetores da base $\mathcal{T}$.

   Caso não tenha resolvido a alínea anterior, use a matriz A da Questão 4.

4. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

   sendo $\lambda = 1$ um dos seus valores próprios.

   (a) Determine o conjunto de todos os vetores próprios associados ao valor próprio $\lambda = 1$.

   (b) Indique o subespaço próprio associado ao valor próprio $\lambda = 1$.

   (c) Diga, justificando, se a matriz A é diagonalizável. Em caso afirmativo obtenha uma matriz diagonalizante para A.

5. Considere a matriz $C=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 2\end{bmatrix}$ e a transformação linear $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ dada por $\phi(X) = CX$ para todo o $X \in \mathbb{R}^4$.

   (a) Determine a imagem de ϕ, $\mathrm{im}(\phi)$, e uma sua base.

   (b) ϕ é sobrejetiva? Justifique.

   (c) ϕ é injetiva? Justifique.

   (d) Encontre a matriz G representativa da transformação ϕ relativamente às bases $\mathcal{S} = \big((1,1,1,1),(0,1,1,1),(0,0,1,1),(0,0,0,1)\big)$ de $\mathbb{R}^4$ e $\mathcal{T} = \big((1,1),(0,1)\big)$ de $\mathbb{R}^2$.

6. Considere a quádrica de equação $x^2 + 2x = 2y^2 + 4y + z^2$ Determine uma sua equação reduzida e classifique-a.

Questão	1	2	3	4	5	6
Cotação	3	3	3	4	5	2