

**Exercício 2a).**  $\frac{1}{\sqrt{x^3}} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$  é contínua em  $[1, \infty[$ , logo trata-se de um integral impróprio de 1ª espécie no limite superior. Ora, por definição:

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3}} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{1}{\sqrt{x^3}} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx \\ &= -2 \cdot \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \underbrace{-\frac{1}{2\sqrt{x^3}}}_{f'(x)} \cos\left(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{x}}}_{f(x)}\right) dx \\ &= -2 \cdot \lim_{t \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \Big|_1^t \\ &= -2 \cdot (0 - \sin(1)) = 2 \sin(1). \end{aligned}$$

E concluímos assim que o integral em estudo é convergente.

**Exercício 2b).** Começemos por ver que  $\frac{x}{\sqrt[3]{1-x^2}}$  é contínua em  $] -1, 1[$ . Adicionalmente, sabemos que:

- $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x}{\sqrt[3]{1-x^2}} = -\infty$ , pelo que a função é ilimitada junto a  $-1$ ,
- $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{\sqrt[3]{1-x^2}} = \infty$ , pelo que a função é ilimitada junto a  $1$ .

Desta forma, estamos na presença de um integral impróprio de 2ª espécie em ambos os limites de integração. Este irá convergir se e só se os dois integrais de 2ª espécie convergirem:

$$\int_{-1}^0 \frac{x}{\sqrt[3]{1-x^2}} dx \quad \text{e} \quad \int_0^1 \frac{x}{\sqrt[3]{1-x^2}} dx.$$

Por definição:

- $\int_{-1}^0 \frac{x}{\sqrt[3]{1-x^2}} dx = \lim_{t \rightarrow -1^+} -\frac{3(1-x^2)^{\frac{2}{3}}}{4} \Big|_t^0 = \lim_{t \rightarrow -1^+} \left( -\frac{3}{4} + \frac{3(1-t^2)^{\frac{2}{3}}}{4} \right) = -\frac{3}{4}.$
- $\int_0^{1^-} \frac{x}{\sqrt[3]{1-x^2}} dx = \lim_{t \rightarrow 1^-} -\frac{3(1-x^2)^{\frac{2}{3}}}{4} \Big|_0^t = \lim_{t \rightarrow 1^-} \left( -\frac{3(1-t^2)^{\frac{2}{3}}}{4} + \frac{3}{4} \right) = \frac{3}{4}.$

Portanto, o integral dado converge e temos que

$$\int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt[3]{1-x^2}} dx = \int_{-1}^0 \frac{x}{\sqrt[3]{1-x^2}} dx + \int_0^1 \frac{x}{\sqrt[3]{1-x^2}} dx = -\frac{3}{4} + \frac{3}{4} = 0.$$