Matemática Discreta

Aula 1

Sumário

Docente: Maria Elisa Carrancho Fernandes

Email: maria.elisa@ua.pt

Avaliação de Matemática Discreta:

1º teste 29 de Março

2º teste na época de exames

OT

2ª feira 18-19;

3ª feira 19-20 (online)

5ª feira 18-19

Programa

1. Lógica de primeira ordem e demonstração automática
2. Princípios de enumeração combinatória
3. Agrupamentos e Identidades Combinatórias
4. Recorrência e Funções Geradoras
5. Elementos de Teoria dos Grafos

O que é um proposição?

Na lógica proposicional, uma **proposição** é uma afirmação que apenas toma o valor verdadeiro ou falso, mas não os dois ao mesmo tempo. Temos então alguns exemplos de proposições:

- Um número primo ímpar p é soma de dois quadrados se e só se p tem o resto 1 na divisão por 4.
- $\sqrt{2}$ é um número racional.
- $1 + 1 = 3$ e 11 é um número primo.
- A hipótese de Riemann é falsa ou está a chover.
- Se o S. L. Benfica é campeão, então o F. C. Porto não é campeão.

A partir deste momento, podemos fazer a distinção entre dois tipos de proposições:

- **atómicas**: proposições onde o valor de verdade é dado pelo contexto ou escolhido livremente.
- **compostas**: proposições compostas por outras proposições, ligadas pelos conectivos, onde o valor de verdade depende do valor de verdade das componentes.

- $\wedge$ representará a **conjunção** (« ... e ... »);
- $\vee$ representará a **disjunção** (« ... ou ... »);
- $\neg$ representará a **negação** (« não ... »);
- $\rightarrow$ representará a **implicação** ou **condicional** (« Se ... então ... »);
- $\leftrightarrow$ representará a **dupla implicação** ou **equivalência** (« ... se e só se ... »).

As **fórmulas proposicionais** podem então ser definidas indutivamente de acordo com as regras que abaixo se apresentam:

1. cada variável é uma fórmula e $\perp$ and $\top$ são fórmulas.

2. Se φ e ψ são fórmulas, então as expressões

$$(\neg\psi), \quad (\varphi \wedge \psi), \quad (\varphi \vee \psi), \quad (\varphi \rightarrow \psi), \quad (\varphi \leftrightarrow \psi)$$

   são fórmulas.

Folha 0

1. Sejam p, q, r variáveis que representam as proposições

   p: *Sou responsável*;

   q: *Passo a Matemática Discreta*;

   r: *Vou de férias para as Bermudas.*

   Traduza as frases seguintes por meio de fórmulas proposicionais.

   a) Se passar a Matemática Discreta, vou de férias para as Bermudas.

   b) Para ir de férias para as Bermudas é suficiente que eu seja responsável.

   c) Passo a Matemática Discreta só se for responsável.

   d) Para passar a Matemática Discreta é necessário que eu seja responsável.

   e) Se passar a Matemática Discreta então vou de férias para as Bermudas caso seja responsável.

Definição 1.1.7. Uma **valoração** (ou **interpretação**) de um conjunto V de variáveis proposicionais é uma função $v\colon V \to \{0, 1\}$, onde 0 representa o valor lógico «falso» e 1 representa o valor lógico «verdadeiro».

Nota 1.1.8. Como visto anteriormente, os símbolos $\bot$ e $\top$ representam proposições atómicas especiais. Para qualquer valoração v, vamos convencionar $v(\top) = 1$ e $v(\bot) = 0$.

Exercício: Qual será o valor de verdade da seguinte formula?

$$((p \to (q \wedge r)) \leftrightarrow (\neg p \vee q))$$

Definição 1.1.13. Uma fórmula diz-se:

- uma **tautologia** (ou **fórmula válida**) quando tiver o valor lógico 1 para <u>qualquer</u> interpretação;
- uma **contingência** (ou **fórmula consistente**) se existir uma interpretação com valor lógico 1;
- uma **contradição** (ou **inconsistência**) quando não for uma consistência, ou seja, quando tiver valor lógico 0 para <u>qualquer</u> interpretação.

Definição 1.1.15. Duas fórmulas φ e ψ dizem-se **equivalentes lógicas** ($\varphi \equiv \psi$) quando a fórmula $\varphi \leftrightarrow \psi$ é uma tautologia.

Tautologias

$$(p \vee q) \equiv (q \vee p)$$

$$(p \wedge q) \equiv (q \wedge p)$$

$$((p \wedge q) \wedge r) \equiv (p \wedge (q \wedge r))$$

$$((p \vee q) \vee r) \equiv (p \vee (q \vee r))$$

$$(p \wedge p) \equiv p$$

$$(p \vee p) \equiv p$$

$$(p \wedge \top) \equiv p$$

$$(p \vee \bot) \equiv p$$

$$(p \wedge \bot) \equiv \bot$$

$$(p \vee \top) \equiv \top$$

$$(p \wedge (q \vee r)) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

$$(p \vee (q \wedge r)) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

$$\neg(p \vee q) \equiv (\neg p \wedge \neg q)$$

$$\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p \vee \neg q)$$

$$\neg\neg p \equiv p$$

Exercício: **Existe uma formula φ com esta tabela de verdade?**

p	q	r	φ
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Definição 1.1.19. Uma fórmula φ é dita um **literal** se φ for uma variável ou a negação de uma variável.

Teorema 1.1.20. *Para cada $j \in J$ (com J um subconjunto de índices), seja L_j um literal. Então, são equivalentes as seguintes afirmações:*

i) $\bigvee_{j\in J} L_j$ *é uma tautologia.*

ii) $\bigwedge_{j\in J} L_j$ *é uma contradição.*

iii) *Existem índices distintos $j_1, j_2 \in J$ tais que $L_{j_1} = \neg L_{j_2}$.*

Forma Normal Conjuntiva

Definição 1.1.21. Dizemos que uma fórmula φ está na **forma normal conjuntiva** (**FNC**) quando $\varphi = \bigwedge_{i \in I} \varphi_i$ (para algum subconjunto de índices I) e onde cada φ_i é da forma $\bigvee_{j \in J} L_j$ (para algum subconjunto de índices J), com L_j literais. Nestas circunstâncias, diremos que as componentes φ_i serão $\vee$-**cláusulas**.

Nota 1.1.22. Muitas das vezes, consideramos ainda a forma normal conjuntiva dual, a **forma normal disjuntiva** (**FND**). Neste caso, uma fórmula φ estará nessa forma quando $\varphi = \bigvee_{i \in I} \varphi_i$, onde cada φ_i da forma $\bigwedge_{j \in J} L_j$, com L_j literais.

Exemplo 1.1.23. Consideremos as variáveis proposicionais p, q, r.

- $(p \vee q) \wedge (p \vee r) \wedge \neg r$ é uma FNC.
- $(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vee \neg r$ é uma FND.
- $p \wedge q \wedge r$ é uma FNC e uma FND.
- $(p \wedge (q \vee r)) \vee q$ não é nem FNC, nem FND.

Teorema 1.1.25. *Toda a fórmula da lógica proposicional é equivalente a uma fórmula na FNC (FND).*

Teorema 1.1.26. *Uma fórmula na FNC é uma tautologia se e só se cada uma das suas clausulas for uma tautologia. Dualmente, uma fórmula na FND é uma contradição se e só se cada uma das suas clausulas for uma contradição.*

Exercício: Coloque φ na FNC?

$$\varphi = ((p \leftrightarrow q) \to (r \to s)) \land (q \to \neg(p \land r))$$

Matemática Discreta

Aula 2

Folha 0

2. Usando tautologias apropriadas, transforme as seguintes fórmulas na forma normal conjuntiva.

   a) $p \vee (q \wedge (\neg p))$;

   b) $\neg((\neg p) \wedge (\neg q))$;

   c) $(p \wedge q) \vee (p \wedge (\neg q))$.

   d) $(q \wedge \neg p \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q)$.

Sumário

- Conjuntos de fórmulas consistentes.
- Consequência semântica.
- Dedução.
- O método de resolução (lógica proposicional)

Conjunto Consistente

Definição 1.1.29. Um conjunto de fórmulas $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ dir-se-á **consistente** quando existir uma interpretação que é modelo de todas as fórmulas em $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$, i.e., se existir uma interpretação de tal forma a que todas as fórmulas do conjunto sejam verdadeiras.

Exemplo 1.1.30. Consideremos as variáveis proposicionais p, q e um conjunto de fórmulas $\Gamma = \{\neg p, p \to q, q\}$. Rapidamente conseguimos ver que Γ é consistente: basta considerar a valoração tal que $p \mapsto 0$ e $q \mapsto 1$.

Consequência Semântica

Definição 1.1.32. Uma fórmula ψ diz-se **consequência semântica** (ou **consequência lógica**) das fórmulas $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ quando, para toda a valoração, se $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ têm valor 1, então ψ tem valor 1. Neste caso, escrevemos $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vDash \psi$.

Teorema 1.1.34. *Dadas fórmulas $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ e ψ, temos que $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vDash \psi$ se e só se $((\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n) \rightarrow \psi)$ for uma tautologia.*

Exemplo 1.1.33. Vamos verificar que $q \vee \neg p$ é consequência de $p \vee q$ e $p \rightarrow q$, ou seja, que $p \vee q, p \rightarrow q \vDash q \vee \neg p$.

Consequência Sintática

Definição 1.1.36. Uma fórmula ψ diz-se **consequência sintáctica** das fórmulas $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ se, a partir destas, existir uma **prova** (**dedução**) de ψ (por aplicação das regras de inferência anteriormente introduzidas). Neste caso, escrevemos $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \psi$.

Teorema da Correcção diz-nos que «tudo o que se prova é válido», i.e., que se $\Gamma \vdash \psi$, então $\Gamma \vDash \psi$. Já o Teorema da Completude diz-nos que «tudo o que é válido se consegue provar», ou seja, que se $\Gamma \vDash \psi$, então $\Gamma \vdash \psi$.

Teorema 1.1.42. *Seja ψ uma fórmula e Γ um conjunto de fórmulas. Então $\Gamma \vDash \psi$ se e só se $\Gamma \cup \{\neg\psi\}$ é inconsistente.*

$$\frac{\neg\psi \vee \theta \qquad \psi \vee \varphi}{\theta \vee \varphi}\ (\mathrm{Res})$$

Em particular, se tivermos $\theta = \bot$ e $\theta = \varphi = \bot$, conseguimos derivar, respectivamente

$$\frac{\neg\psi \qquad \psi \vee \varphi}{\varphi} \qquad \text{e} \qquad \frac{\neg\psi \qquad \psi}{\bot}$$

Teorema 1.1.43. *Para cláusulas $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, o conjunto $\Gamma = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ é inconsistente se e só se $\Gamma \vdash \bot$.*

Nota 1.1.44. Para verificar se $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vDash \psi$ devemos:

1. converter as fórmulas $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ na FNC.
2. negar a fórmula ψ e converter $\neg\psi$ na FNC.
3. aplicar a regra de resolução às cláusulas obtidas acima até:
   - obter $\perp$;
   - não conseguirmos aplicar a regra de resolução (sem obter $\perp$).

Exercício: Vamos verificar $p \to q, q \to r \vDash p \to r$.

Folha 0

3. Utilizando o método de resolução, justifique que

   a) $p,\ p \to q \models q$;

   b) $p \vee q,\ p \to r,\ q \to r \models r$.

4. Utilizando o método de resolução, verifique a correção de cada uma das seguintes deduções:

   a) Chove se e só se levo guarda-chuva. Hoje não levo guarda-chuva. Logo, hoje não chove.

   b) Chove se levo guarda-chuva. Hoje não levo guarda-chuva. Logo, hoje não chove.

   c) Se o mordomo cometeu o crime, então ele vai estar nervoso quando interrogado. O mordomo estava nervoso quando interrogado. Logo, o mordomo cometeu o crime.

   d) r é uma condição suficiente para q. Além disso, verifica-se r ou a negação de p. Logo, se q não for verdadeiro, não se verifica p.

   e) De $\neg(p \vee q)$ deduz-se $\neg p$.

Matemática Discreta

Aula 3

Sumário

Sintaxe e Semântica de lógica de primeira ordem

- Sintaxe: linguagem, termos, fórmulas interpretação.
- Variáveis livres e ligadas.

Folha 1

2. Exprima por meio de fórmulas bem formadas as seguintes afirmações:

   a) Todas as aves têm penas.

   b) Todas as crianças são mais novas que os seus pais.

   c) Todos os insectos são mais leves do que algum mamífero.

   d) Nenhum número é menor do que zero.

   e) Zero é menor do que qualquer número.

   f) Alguns números primos não são pares.

   g) Todo o número par é número primo.

Lógica de 1ª ordem

Definição 1.2.1. Um **alfabeto de 1ª ordem** consiste:

1. numa colecção de **variáveis**;
2. nos **símbolos** «$\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \neg, \top, \bot$» da lógica proposicional;
3. nos **quantificadores**: os símbolos «$\exists$» (existe) e «$\forall$» (para todos);
4. no símbolo de **igualdade** «$=$».

Além dos pontos expostos acima, e dependendo do contexto, podemos ainda ter:

- uma coleção de **símbolos de constantes**;
- uma coleção de **símbolos de função** (cada símbolo de função tem uma **aridade** $n \in \mathbb{N}$ = número de argumentos);
- uma coleção de **símbolos de predicado** (**relação**) com $n \in \mathbb{N}$ argumentos;

Definição 1.2.3. Vamos introduzir o conceito de **termo** de forma recursiva:

- cada variável e cada símbolo de constante são termos;
- se f é um símbolo de função de aridade n e se $t_1, \ldots, t_n$ são termos, então $f(t_1, \ldots, t_n)$ também é um termo.

Definição 1.2.5. Da mesma forma que fizemos para os termos, vamos agora introduzir, recursivamente, o conceito de **fórmula**. Comecemos com os **átomos** (ou **fórmulas atómicas**):

- $P(t_1, \ldots, t_n)$ é um átomo, onde P é um símbolo de predicado com n argumentos e $t_1, \ldots, t_n$ são termos;
- $t_1 = t_2$ é um átomo, onde t_1, t_2 são termos;
- $\perp$ e $\top$ são átomos;

A partir daqui, e considerando os átomos como «elementos primitivos», podemos construir recursivamente as fórmulas a partir dos conectivos lógicos e dos quantificadores apresentados anteriormente:

- se φ e ψ são fórmulas, então

$$(\varphi \wedge \psi), \quad (\varphi \vee \psi), \quad (\varphi \to \psi), \quad (\neg\varphi), \quad \perp, \quad \top,$$

  são fórmulas;
- se φ é uma fórmula e x é uma variável, então $\forall x\, \varphi$ e $\exists x\, \varphi$ são fórmulas.

Nota 1.2.7. Nas fórmulas da forma $\forall x\varphi$ (resp. $\exists x\varphi$), dizemos que a fórmula φ é o **alcance do quantificador** $\forall$ (resp. $\exists$).

Definição 1.2.9. A ocorrência de uma variável numa fórmula diz-se **ligada** se esta estiver dentro do alcance de um quantificador utilizado para essa mesma variável. Por outro lado, a ocorrência de uma variável dir-se-á **livre** se não for ligada.

Nota 1.2.10. Uma variável numa fórmula φ dir-se-á livre quando ocorrer pelo menos uma vez livre em φ. Adicionalmente, diremos que φ é **fechada** quando esta não tiver variáveis livres.

Exemplo:

(1) $(\forall x\ \exists y\ x < y) \wedge (a < x)$

(2) $\forall x\ \exists y\ (x < y \wedge a < x)$

Folha 1

1. Indique quais as ocorrências livres e ligadas de cada uma das variáveis das seguintes fórmulas:

   a) $\exists y\, P(x, y)$

   b) $(\forall x\, (P(x) \to Q(x))) \to (\neg(P(x)) \vee Q(y))$

   c) $\exists x\, (P(y, z) \wedge \forall y(\neg Q(x, y) \vee P(y, z)))$;

   d) $P(a, f(a, b))$;

   e) $\exists x\, (P(x) \to \neg Q(x))$;

   f) $\forall x\, ((P(x) \wedge C(x)) \to \exists y L(x, y))$.

   Nota. x, y, z, a, b são variáveis.

3. No que se segue, $c(x)$, $s(x)$ e $d(x)$ representam as afirmações «x é uma explicação clara», «x é satisfatória» e «x é uma desculpa», respectivamente. Admita que o universo do discurso para x é o conjunto de todos os textos em Português. Traduza as seguintes fórmulas bem formadas para linguagem comum:

   a) $\forall x \; c(x) \to s(x)$;

   b) $\exists x \; d(x) \;\wedge\; \neg\, s(x)$;

   c) $\exists x \; d(x) \;\wedge\; \neg\, c(x)$.

7. Obtenha, na forma mais simplificada possível, a negação da seguinte fórmula

$$\forall y \, \exists x \;\; (\, (\, q(x) \to p(y) \,) \;\vee\; (\, p(y) \wedge q(x) \,) \,) \;\; .$$

Matemática Discreta

Aula 4

Sumário

- Interpretação.
- Consequência semântica
- Fórmulas na forma normal.
- Regras para obter formas normais.
- Forma normal de Skolem.

Qual o significado da formula $x = c$?

Definição 1.2.12. Uma **estrutura** $\mathcal{M}$ para um alfabeto de 1ª ordem consiste num conjunto D (domínio) onde:

- a cada símbolo de constante a, associamos um **elemento** $a^{\mathcal{M}} \in D$;
- a cada símbolo de função f (de aridade n), associamos uma **função** $f^{\mathcal{M}} \colon D^n \to D$;
- a cada símbolo de predicado P (de aridade n), associamos um **subconjunto** $P^{\mathcal{M}} \subseteq D^n$.

Definição 1.2.13. Dada uma estrutura $\mathcal{M}$, uma **valoração** v em $\mathcal{M}$ associará a cada variável x um elemento $v(x) \in D$. Adicionalmente, designamos o par $(\mathcal{M}, v)$ por **interpretação**.

Qual o significado da formula $\exists x\ (x = c)$?

Definição 1.2.16. Dada uma interpretação $(\mathcal{M}, v)$ de um alfabeto de 1ª ordem, definimos recursivamente o conceito de **validade** de uma fórmula em $(\mathcal{M}, v)$ da seguinte forma:

- $(\mathcal{M}, v) \vDash t_1 = t_2$ quando $v(t_1) = v(t_2)$;
- $(\mathcal{M}, v) \vDash P(t_1, \ldots, t_n)$ quando $(v(t_1), \ldots, v(t_n)) \in P$;
- $(\mathcal{M}, v) \vDash \top$ e **não** $(\mathcal{M}, v) \vDash \bot$;
- $(\mathcal{M}, v) \vDash (\varphi \wedge \psi)$ quando $(\mathcal{M}, v) \vDash \varphi$ e $(\mathcal{M}, v) \vDash \psi$;
- $(\mathcal{M}, v) \vDash (\varphi \vee \psi)$ quando $(\mathcal{M}, v) \vDash \varphi$ ou $(\mathcal{M}, v) \vDash \psi$;
- $(\mathcal{M}, v) \vDash (\varphi \rightarrow \psi)$ quando $(\mathcal{M}, v) \vDash \varphi$ implicar $(\mathcal{M}, v) \vDash \psi$;
- $(\mathcal{M}, v) \vDash \exists x\, \varphi$ quando, para algum $a \in D$, $(\mathcal{M}, v^{\frac{x}{a}}) \vDash \varphi$;
- $(\mathcal{M}, v) \vDash \forall x\, \varphi$ quando, para todo o $a \in D$, $(\mathcal{M}, v^{\frac{x}{a}}) \vDash \varphi$.

$$v^{\frac{x}{a}}(y) = \begin{cases} v(y), & \text{se } y \text{ é diferente de } x, \\ a, & \text{se } y \text{ é igual a } x. \end{cases}$$

Nota 1.2.17. Dizer que uma dada fórmula φ é **válida** numa interpretação $(\mathcal{M}, v)$ é o mesmo que dizer que $(\mathcal{M}, v)$ é um **modelo** para φ. Usualmente, denotamos esta relação por $(\mathcal{M}, v) \vDash \varphi$.

Exercício: Sejam $\mathscr{M}$ uma estrutura com

• $D = \{1,2,3\}$; $R = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,2), (3,3), (3,2)\}$; $S = \{1,3\}$

e v uma valorarão com $v(x) = 3$ e $v(y) = 2$.

Verifique a validade das seguintes fórmulas:

(a) $R(x, y)$ (b) $S(y)$ (c) $\forall y\ (S(x) \wedge R(x, y))$ (d) $\exists x \forall y (S(x) \wedge R(x, y))$

10. Para cada fórmula seguinte determine, se possível, um modelo e uma interpretação em que a mesma seja não valida:

    a) $\forall x\,(P(x,a) \rightarrow \neg Q(x,a))$, onde a denota um símbolo de constante;

Definição 1.2.22. Uma fórmula diz-se:

- uma **tautologia** (ou **fórmula válida**) quando for válida para qualquer interpretação;
- uma **contingência** (ou **fórmula consistente**) se existir uma interpretação para a qual seja válida;
- uma **contradição** (ou **inconsistência**) quando não for uma consistência, ou seja, quando for inválida para qualquer interpretação.

Definição 1.2.24. Duas fórmulas φ e ψ dizem-se **equivalentes** ($\varphi \equiv \psi$) quando $\varphi \leftrightarrow \psi$ é uma tautologia.

Definição 1.2.25. Uma fórmula ψ diz-se **consequência semântica** (ou **consequência lógica**) das fórmulas $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ quando, para toda a interpretação $(\mathcal{M}, v)$, se $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ são válidas em $(\mathcal{M}, v)$, então ψ é válida em $(\mathcal{M}, v)$. Neste caso, escrevemos $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vDash \psi$.

Forma Normal Prenex

Definição 1.3.2. Uma fórmula da forma $Qx_1 \cdots Qx_n \ \varphi$, onde φ é uma fórmula sem quantificadores e Q denota «$\exists$» ou «$\forall$» diz-se na **forma normal prenex** (**FNP**).

Nota 1.3.3. Relativamente a uma fórmula $Qx_1 \cdots Qx_n \ \varphi$ na FNP, é comum designamos a parte inicial («$Qx_1 \cdots Qx_n$») por **prefixo** e «φ» por **matriz** da fórmula.

- Mover as negações («¬») para o interior das fórmulas:

$$\neg\forall x\ \varphi \equiv \exists x\ \neg\varphi \quad \text{e} \quad \neg\exists x\ \varphi \equiv \forall x\ \neg\varphi;$$

- Mover os quantificadores para o exterior das fórmulas:
  - $(\forall x\ \varphi) \wedge (\forall x\ \psi) \equiv \forall x\ (\varphi \wedge \psi)$;
  - $(\exists x\ \varphi) \vee (\exists x\ \psi) \equiv \exists x\ (\varphi \vee \psi)$;
  - supondo que ψ não contém a variável x:

$$\begin{aligned} (\forall x\ \varphi) \wedge \psi &\equiv \forall x\ (\varphi \wedge \psi), & (\exists x\ \varphi) \wedge \psi &\equiv \exists x\ (\varphi \wedge \psi), \\ (\forall x\ \varphi) \vee \psi &\equiv \forall x\ (\varphi \vee \psi), & (\exists x\ \varphi) \vee \psi &\equiv \exists x\ (\varphi \vee \psi). \end{aligned}$$

Exercício: Escreva as formulas seguintes na FNP.

(a) $\forall x P(x) \to \exists x Q(x)$

(b) $\forall x \forall y[(\exists x(P(x,z) \wedge P(y,z))) \to (\exists u Q(x,y,u))]$

11. Transforme as seguintes fórmulas na forma normal disjuntiva prenex e na forma normal conjuntiva prenex:

    a) $(\forall x\, S(x)) \to (\exists z\, P(z))$;

    b) $\neg(\forall x\, (S(x) \to P(x)))$;

    c) $\forall x\, (P(x) \to (\exists y\, Q(x, y)))$;

    d) $\exists x\, (\neg(\exists y\, P(x, y)) \to (\exists z\, (Q(z) \to R(x))))$;

    e) $\forall x\, \exists y\, \exists z\ ((\neg P(x, y) \wedge Q(x, z)) \vee R(x, y, z))$.

Forma Normal de Skolem

Definição 1.3.7. Uma fórmula diz-se na **forma normal de Skolem** (**FNS**) se for uma FNP, estando a matriz na FNC e sendo o prefixo composto apenas por quantificadores universais («∀»).

- no caso $\exists x_1\; Q_2 x_2\; \cdots Q_n x_n\; \varphi$:

  1. escolhemos um novo símbolo de constante (digamos c);
  2. substituimos todas as ocorrências livres de x_1 em $Q_2 x_2\; \cdots\; Q_n x_n\; \varphi$ por c;
  3. eliminamos $\exists x_1$ do prefixo.

- no caso $\forall x_1\; \cdots\; \forall x_{k-1}\; \exists x_k\; Q_{k+1} x_{k+1}\; \cdots\; Q_n x_n\; \varphi$ $(k > 1)$:

  1. escolhemos um novo símbolo de função (digamos f) de aridade $k-1$;
  2. substituimos todas as ocorrências livres de x_k em $Q_{k+1} x_{k+1}\; \cdots\; Q_n x_n\; \varphi$ por $f(x_1, \ldots, x_{k-1})$;
  3. eliminamos $\exists x_k$ do prefixo.

Nota 1.3.9. As funções e constantes utilizadas para substituição das variáveis existentes (no procedimento acima) são ditas **funções de Skolem**.

Exercício: Escreva as formulas seguintes na FNS.

(a) $\exists x \forall y \forall z \exists u \forall v \exists w \, P(x, y, z, u, v, w)$

(b) $\forall x \exists y \exists z((\neg P(x, y) \wedge Q(x, z))) \vee R(x, y, z))$

12. Encontre a forma standard de Skolem das seguintes fórmulas:

a) $\neg((\forall x \, P(x)) \rightarrow (\exists y \, P(y)))$

b) $\neg((\forall x \, P(x)) \rightarrow (\exists y \forall z \, Q(y, z)))$

c) $\forall x \exists y \exists z \, ((\neg P(x, y) \wedge Q(x, z)) \vee R(x, y, z))$