Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro

Álgebra Linear e Geometria Analítica — Agrup. IV

1.ª ***Prova de Avaliação Discreta; 2 de novembro de 2018***

Duração: **1h30min**

– Justifique todas as respostas e indique os cálculos efetuados –

1. Considere as matrizes: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

[15pts] (a) Calcule um produto (que esteja definido) das três matrizes.

[20pts] (b) Usando o método de eliminação de Gauss-Jordan, determine a matriz escalonada por linhas reduzida equivalente a C. Indique, justificando, a característica e a nulidade de C.

[15pts] (c) Justifique que A é invertível. Sendo $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, determine a matriz X tal que $XA^{-1} = D$.

2. Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$, e $B = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$.

[40pts] (a) Discuta, em função do parâmetro a, o sistema $AX = B$.

[12pts] (b) Para $a = 3$, B pertence ao espaço das colunas de A? Justifique.

[13pts] (c) Para $a = 1$, determine $\mathcal{N}(A)$, o espaço nulo de A.

3. Sejam $A(-1, 0, 2)$, $B(1, 2, 3)$ e $C(0, 1, 3)$ pontos de $\mathbb{R}^3$.

[15pts] (a) Calcule o volume do paralelepípedo com vértice em $O = (0, 0, 0)$ e arestas $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OC}$.

[20pts] (b) Calcule a área de um dos paralelogramos com vértices em O, A e B.

4. Seja A a matriz 4×4 invertível tal que adj $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 8 \\ 1 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

[15pts] (a) Verifique que $\det(\text{adj}\, A) = -8$

[20pts] (b) Calcule A^{-1} .

[15pts] 5. Diga, justificando, se é verdadeira ou falsa a seguinte afirmação. Caso seja falsa, apresente um contra-exemplo.

$(X \times Y) \cdot (X + Y) = 0$, quaisquer que sejam $X, Y \in \mathbb{R}^3$.