Álgebra Linear e Geometria Analítica - A

Exame Final **19 de Janeiro de 2024**

Justifique devidamente as respostas a todas as questões

Duração total do exame: 2h30m

---

*(2 val.)***1)** Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, o vetor $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ e o sistema de equações lineares $AX = b$, onde $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ é o vetor das incógnitas. Resolva o sistema $AX = b$, através do método de fatorização $A = LU$.

(Nota: em alternativa pode resolver o sistema pelo método de eliminação de Gauss, mas neste caso a questão terá a cotação de 1 valor).

*(2 val.)***2)** Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, o vetor $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ e o sistema de equações lineares $AX = b$, onde $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ é o vetor das incógnitas. Justifique que o sistema $AX = b$ é um sistema de Cramer e determine o valor da incógnita z pela regra de Cramer.

*(2 val.)***3)** Determine a matriz A tal que $(A + I_2)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

*(4 val.)***4)** Considere o subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$, F, com base $\mathscr{B} = \Big((\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0), (0, 0, 1) \Big)$.

a) Mostre que $\mathscr{B}$ é uma base ortonormada de F.

b) Determine a projeção ortogonal do vetor $(1, 2, 3)$ sobre F.

c) Encontre a solução dos mínimos quadrados do sistema

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x - y = 2 \\ y = 3 \end{cases}$$

e calcule o erro dos mínimos quadrados.

(v.s.f.f)

(2 val.) **5)** Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & a & 2 \end{bmatrix}$, onde a é um parâmatro real.

a) Calcule os valores próprios de A.

b) Determine os valores de a para os quais a matriz A é diagonalizável.

(1,5 val.) **6)** Considere a matriz simétrica $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & 20 \end{bmatrix}$.

a) Usando o Critério de Sylvester, justifique que a forma quadrática $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $Q(X) = X^T AX$, para $X \in \mathbb{R}^3$, é definida positiva.

b) O que pode dizer acerca dos valores próprios de A?

(2,5 val.) **7)** Considere a cónica de equação

$$5x^2 - 4xy + 5y^2 + \sqrt{2}x + \sqrt{2}y = 0.$$

Obtenha uma equação reduzida da cónica e classifique-a.

(3 val.) **8)** Considere a aplicação linear $L : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ definida por

$$L(x, y, z) = (x - z, -y + 2z, x - y + z).$$

a) Determine uma base do núcleo de L e a sua dimensão. L é injetiva?

b) Determine a matriz de representativa de L relativamente à base $\mathscr{B} = ((1, -1, 0), (1, 0, 1), (0, 0, 1))$ de $\mathscr{R}^3$, $[L]_{\mathscr{B},\mathscr{B}}$.

(1 val.) **9)** Justifique as seguintes afirmações (verdadeiras).

a) Considere a aplicação linear $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^n$. Se L é injetiva então $n \geq 4$.

b) Seja $\{u, v, w\}$ um conjunto ortogonal de vetores de $\mathbb{R}^n$. Então $\{u, \alpha v + \beta w\}$ é também um conjunto ortogonal, para todos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.