1a)

$D_f = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 1 \wedge 4(\arcsin x)^2 - \pi \arcsin x \geq 0\}$

Em $[-1,1]$ temos:

$4(\arcsin x)^2 - \pi \arcsin x \geq 0 \iff \arcsin x \cdot (4\arcsin x - \pi) \geq 0$

$\iff \left(\arcsin x \geq 0 \wedge \arcsin x \geq \frac{\pi}{4}\right) \vee \left(\arcsin x \leq 0 \wedge \arcsin x \leq \frac{\pi}{4}\right)$

$\iff \left(x \geq 0 \wedge x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \vee \left(x \leq 0 \wedge x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$\therefore D_f = [-1, 0] \cup \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]$

b) Em $]-1,0[\cup]\frac{\sqrt{2}}{2}, 1[$,

$$f'(x) = \frac{8\arcsin x - \pi}{2\sqrt{1-x^2}\sqrt{4(\arcsin x)^2 - \pi \arcsin x}}$$

$f'(x) = 0 \iff 8\arcsin x - \pi = 0$

$\iff x = \sin\frac{\pi}{8}$

Como $\sin\frac{\pi}{8} \notin]-1,0[\cup]\frac{\sqrt{2}}{2}, 1[$, então a derivada de f nunca se anula no interior de D_f, embora exista aí sempre.

O teorema de Weierstrass é aplicável a

$f|_{[-1,0]}$ e a $f|_{[\frac{\sqrt{2}}{2},1]}$, já que as funções

são contínuas aí, logo estas funções têm máximo

e mínimo absolutos.

Tendo em conta o que vimos sobre f, os extremos

absolutos terão que ser atingidos nos extremos

dos dois intervalos $[-1,0]$ e $[\frac{\sqrt{2}}{2},1]$.

$$f(-1) = \sqrt{4(\arcsin(-1))^2 - \pi \arcsin(-1)} = \sqrt{\pi^2 + \frac{\pi^2}{2}} = \pi\sqrt{\frac{3}{2}} \leftarrow \text{MAX}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = 0 \\ f(\frac{\sqrt{2}}{2}) = 0 \end{array}\right) \leftarrow \underline{\text{MIN}}$$

$$f(1) = \sqrt{4(\arcsin(1))^2 - \pi \arcsin(1)} = \sqrt{\pi^2 - \frac{\pi^2}{2}} = \pi\sqrt{\frac{1}{2}}$$

Em conclusão, o mínimo absoluto é 0 e os

minimizantes absolutos são 0 e $\frac{\sqrt{2}}{2}$;

o máximo absoluto é $\pi\sqrt{\frac{3}{2}}$ e o

maximizante absoluto é -1.

2 (a) (2,0 val.)

Utilizamos primitivação por partes duas vezes:

$$\int \cos(\ln x)\,dx = \cos(\ln x)\cdot x - \int x\,d(\cos(\ln x)) = \cos(\ln x)\cdot x - \int x\,(-\sin(\ln x))\,\frac{1}{x}\,dx$$

$$= \cos(\ln x)\cdot x + \int \sin(\ln x)\,dx = \cos(\ln x)\cdot x + \sin(\ln x)\cdot x - \int x\,d(\sin(\ln x))$$

$$= \cos(\ln x)\cdot x + \sin(\ln x)\cdot x - \int x\,\cos(\ln x)\,\frac{1}{x}\,dx = \cos(\ln x)\cdot x + \sin(\ln x)\cdot x - \int \cos(\ln x)\,dx.$$

Desta forma,

$$2\int \cos(\ln x)\,dx = \cos(\ln x)\cdot x + \sin(\ln x)\cdot x$$

e portanto

$$\int \cos(\ln x)\,dx = \frac{x}{2}\,(\cos(\ln x) + \sin(\ln x)) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

2 (b) (2,0 val.)

A função racional imprópria dada pode ser representada na forma da soma de um polinómio e uma função racional própria,

$$\frac{2x^4 + x}{x^3 - x^2 + x - 1} = 2x + 2 + \frac{x+2}{(x-1)(x^2+1)}.$$

Representando a função própria na forma

$$\frac{x+2}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

e usando o método de coeficientes indeterminados, obtemos $A = \frac{3}{2}$, $B = -\frac{3}{2}$, $C = -\frac{1}{2}$. Desta forma, temos

$$\int \frac{2x^4 + x}{x^3 - x^2 + x - 1}\,dx = \int \left(2x + 2 + \frac{3}{2}\,\frac{1}{x-1} - \frac{\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}}{x^2+1}\right) dx$$

$$= x^2 + 2x + \frac{3}{2}\ln|x-1| - \frac{3}{4}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

$$= x^2 + 2x + \frac{3}{2}\ln|x-1| - \frac{3}{4}\ln(x^2+1) - \frac{1}{2}\arctan x + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

2 (c) (2,0 val.)

Fazendo a mudança de variável $x = \frac{1}{t}$, $t \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ e tomando em conta que $dx = -\frac{1}{t^2}\,dt$, temos

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\frac{1}{t^2}\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt = -\int \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}}\,dt = -\int \frac{|t|}{\sqrt{1+t^2}}\,dt.$$

No intervalo $t \in]0, +\infty[$ temos $|t| = t$, logo o integral é igual a

$$-\int (1+t^2)^{-1/2} t\,dt = -\frac{1}{2}\int (1+t^2)^{-1/2}(1+t^2)'\,dt = -\frac{1}{2}\,\frac{(1+t^2)^{1/2}}{\frac{1}{2}} + C$$

$$= -\sqrt{1+t^2} + C = -\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} + C = -\frac{\sqrt{x^2+1}}{|x|} + C = -\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} + C.$$

No intervalo $t \in]-\infty, 0[$ temos $|t| = -t$, logo o integral é igual a

$$\int (1+t^2)^{-1/2} t \, dt = \frac{1}{2} \int (1+t^2)^{-1/2} (1+t^2)' \, dt$$

$$= \sqrt{1+t^2} + C = \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} + C = \frac{\sqrt{x^2+1}}{|x|} + C = \frac{\sqrt{x^2+1}}{-x} + C.$$

Desta forma, a resposta é igual em ambos os intervalos.

A resposta final é

$$-\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Obs.: O C usado num intervalo não tem de ser o mesmo C usado no outro.

Questão 3

a) $|x-1| = \begin{cases} x-1 & , x \geq 1 \\ -x+1 & , x < 1 \end{cases}$

Para $x \geq 1$:

$x - 1 = \sqrt{x} + 1$

$\Leftrightarrow x - \sqrt{x} - 2 = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 + 4 \times 2}}{2}$

$\Leftrightarrow \sqrt{x} = 2$ ou $\sqrt{x} = -1$
impossível

$\Leftrightarrow x = 4$

$\hookrightarrow P(4, 3)$

Para $x < 1$

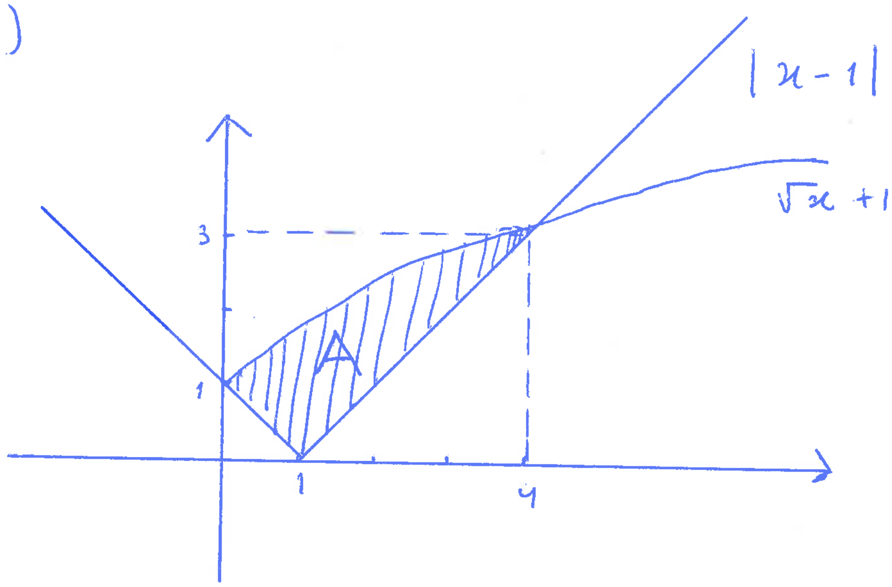
$-x + \cancel{1} = \sqrt{x} + \cancel{1}$

$\Leftrightarrow \underbrace{-x}_{\leq 0} = \underbrace{\sqrt{x}}_{\geq 0}$

$\Leftrightarrow x = 0$

$\hookrightarrow P(0, 1)$

b)



c) $A = \int_0^4 \sqrt{x} + 1 - |x-1| \, dx$

$= \int_0^4 \sqrt{x} + 1 \, dx - \int_0^4 |x-1| \, dx = \int_0^4 \sqrt{x} + 1 - \left(\int_0^1 -(x-1) \, dx + \int_1^4 x - 1 \, dx \right)$

$= \left[\dfrac{2\sqrt{x^3}}{3} + x \right]_0^4 - \left(\left[-\dfrac{x^2}{2} + x \right]_0^1 + \left[\dfrac{x^2}{2} - x \right]_1^4 \right)$

$= \dfrac{16}{3} + 4 - \left(\cancel{-\dfrac{1}{2}} + 1 + 8 - 4 \cancel{-\dfrac{1}{2}} \cancel{+1} \right) = \dfrac{16}{3} - 1 = \dfrac{13}{3}$

Uma proposta de resolução do Exercício 4 do Exame de Recurso

Exercício 4

(a) Estude a natureza (divergência, convergência simples ou convergência absoluta das seguintes séries numéricas

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2}{n^3+3n}$;

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(2n)!}$

Resolução

(i) Comparamos com a série divergente $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Sendo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2+2}{n^3+3n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3+2n}{n^3+3n} = 1 \in]0, \infty[$$

resulta que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2}{n^3+3n}$ também é divergente.

(ii)Tem-se uma série de termos não negativos e a forma do termo geral sugere a utilização do critério de D'Alembert. Por isso:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{(2(n+1))!}}{\frac{2^n}{(2n)!}} = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{2^{n+1}}{2^n} \frac{(2n)!}{(2n+2)!}\right] = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{2}{(2n+1)(2n+2)}\right] = 0$$

e sendo o limite inferior a 1 concluímos que a série é absolutamente convergente.

5. $$\sum_{n=0}^{\infty} \ln\left(\frac{1+e^{-n}}{1+e^{-n-2}}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\ln(1+e^{-n}) - \ln(1+e^{-(n+2)})\right).$$

Série de Mengoli de termo geral $a_n = u_n - u_{n+p}$, com $p=2$ e $u_n = \ln(1+e^{-n})$ (a começar em $n=0$).

Então a soma (já nos disseram que é convergente) é

$$\ln(1+e^{-0}) + \ln(1+e^{-1}) - \lim_{N\to\infty}\left(\ln(1+e^{-N}) + \ln(1+e^{-(N+1)})\right),$$

$$= \ln 2 + \ln\left(1+\frac{1}{e}\right) - \ln 1 - \ln 1 = \ln\left(2+\frac{2}{e}\right).$$

6. f sendo contínua em $\mathbb{R}$, F é diferenciável e

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\left(-\int_0^{x^2+x} f(t)\,dt + \int_0^{x^2+x+2} f(t)\,dt\right)$$

Teorema fundamental do Cálculo $\longrightarrow$

$$= -f(x^2+x).(2x+1) + f(x^2+x+2).(2x+1)$$

$$= (2x+1).\underbrace{\left(f(x^2+x+2) - f(x^2+x)\right)}_{>0}$$

>0, pela hipótese de f ser estritamente crescente, já que $x^2+x+2 > x^2+x$

Então o sinal de F' é dado por $2x+1$. Como $2x+1>0$ em $]0,2[$ e F é contínua em $[0,2]$, então F cresce estritamente em $[0,2]$.

Em conclusão, $\forall x\in]0,2[,\ F(0)<F(x)<F(2)$, de onde se confirma o que é avançado no enunciado: $F(0)$ é o mínimo absoluto e $F(2)$ é o máximo absoluto.