1º teste em exame - Cálculo I - agr. 4 - 2021/22

Resolução

3. (a) Teorema de Rolle:

(5 pontos) Seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ regular (com $a<b$) e tal que $f(a)=f(b)$. Então $\exists c\in]a,b[: f'(c)=0$.

(b) f regular em $[a,b]$; $F(x):=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}x$, $x\in[a,b]$.

i. F é regular em $[a,b]$, i.e., contínua em $[a,b]$ e diferenciável em $]a,b[$:

(10 pontos) Como f tem essas propriedades e qualquer polinómio também, então o mesmo se passa com a diferença que define F.

(*) $$F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a},\quad x\in]a,b[.$$

ii. $$F(a)=F(b)\Leftrightarrow f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}a=f(b)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}b$$

(5 pontos) $$\Leftrightarrow f(a)-f(b)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(a-b)$$

$$\Leftrightarrow f(a)-f(b)=-f(b)+f(a)\Leftrightarrow 0=0,$$

proposição verdadeira, logo o mesmo sucede a $F(a)=F(b)$.

iii. Usando F em vez de f no Teorema de Rolle (já que, por i e ii, F obedece às hipóteses desse teorema),

(10 pontos) concluímos que $\exists c\in]a,b[: \underbrace{F'(c)}=0$.

$$\Updownarrow \leftarrow \text{por } (*)$$

$$f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$$

$$\Updownarrow$$

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$